



BACHELORARBEIT

Frau
Juliane Störzel

**Eine kritische Betrachtung
des Standardmodells in der
Schadenversicherung am
Beispiel des Prämienrisikos**

Mittweida, 2013

BACHELORARBEIT

Eine kritische Betrachtung des Standardmodells in der Schadenversicherung am Beispiel des Prämienrisikos

Autor:

Frau

Juliane Störzel

Studiengang:

Angewandte Mathematik

Seminargruppe:

Ma09w1-B

Erstprüfer:

Dipl.-Math. Bernd Fischer

Zweitprüfer:

Dr. Dieter Köhnlein

Einreichung:

Mittweida, 17.07.2013

Verteidigung/Bewertung:

Mittweida, 2013

Bibliografische Beschreibung:

Störzel, Juliane:

Eine kritische Betrachtung des Standardmodells in der Schadenversicherung am Beispiel des Prämienrisikos -2013. - 6, 60, 11 S.

Mittweida, Hochschule Mittweida, Fakultät Mathematik, Naturwissenschaften und Informatik, Bachelorarbeit, 2013

Referat:

Um das SCR nach Solvency II Richtlinie zu berechnen, stehen die Versicherungsunternehmen in der Umsetzung dieser Anforderungen vor der Wahl, mit dem Standardmodell oder einem internen Modell zu arbeiten. In dieser Arbeit soll untersucht werden, ob sich das Standardmodell zur Berechnung des SCR's eignet, wenn andere Voraussetzungen, als im Standardmodell festgelegt, gegeben sind. In dieser Arbeit wird durch praxisnahe Annahmen von Randverteilungen und Abhängigkeitsstrukturen eine "reale" Risikolage eines Unternehmens simuliert und die daraus resultierenden Werte mit dem SCR nach Standardansatz verglichen und ausgewertet. Die dazu benötigten theoretischen Grundlagen werden im ersten Teil dokumentiert. Im zweiten Teil der Arbeit wird die praktische Umsetzung erläutert und die simulierten Werte untersucht. Dazu werden die Auswirkungen verschiedener Veränderungen bei der Simulation mit dem Varianz-Kovarianz-Ansatz und dem Copula-Ansatz dokumentiert und die Werte mit dem SCR des Standardmodells verglichen. Aus den Schlussfolgerungen der Vergleiche ergibt sich im letzten Teil der Arbeit ein abschließendes Fazit.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	III
Tabellenverzeichnis	IV
Abkürzungs- und Symbolverzeichnis	V
Einführung	1
1 Theoretische Grundlagen	4
2 Risikomaß	5
2.1 Definition	5
2.2 Kohärentes Risikomaß	5
2.3 Beispiele von Risikomaßen	6
2.3.1 Value at Risk	6
2.3.2 Tail Value at Risk	8
2.4 Diversifikation	9
3 Abhängigkeitsmodellierung	11
3.1 Lineare Korrelationen	11
3.2 Copula	12
3.2.1 Elliptische Copula	15
3.2.2 Archimedische Copula	16
3.2.3 Multivariate Archimedische Copulas	22
3.3 Rangkorrelation	24
3.4 Tail Abhängigkeit	25
4 Berechnung des Value at Risk	29
4.1 Einfache Berechnung des Value at Risk	29
4.2 Varianz-Kovarianz-Ansatz	29
4.3 Monte Carlo Simulation	30
4.4 Copula Ansatz	34
5 Praktische Umsetzung	36
6 Das Standardmodell	37
6.1 Beschreibung des Standardmodells	37
6.2 Umsetzung des Standardmodells	42

Inhaltsverzeichnis

7	Internes Modell mit ReMetrica	45
7.1	Umsetzung in ReMetrica	45
7.2	Simulation mit dem Varianz-Kovarianz-Ansatz	46
7.3	Simulation mit dem Copula-Ansatz	53
7.3.1	Vergleich Copula und Standardmodell	53
7.3.2	Vergleich von verschiedenen Verteilungen	53
7.3.3	Vergleich von verschiedene Abhängigkeiten untereinander	55
7.3.4	Praxisbeispiel	57
8	Fazit	59
9	Anhang	61
	Literaturverzeichnis	VI
	Eigenständigkeitserklärung	IX

Abbildungsverzeichnis

2.1	Darstellung des Value at Risk [22]	9
3.1	Produktcopula	15
3.2	Generator strikter Generator [17]	17
3.3	Simulation der gemeinsamen Verteilung mit der Gumbel-Copula	20
7.1	Verschiedene Copulas	46
7.2	exponentialverteilte Risiken	47
7.3	fisherverteilte Risiken	48
7.4	lognormalverteilte Risiken	48
7.5	gammaverteilte Risiken	49
7.6	weibullverteilte Risiken	49
9.1	Lognormalverteilung	67
9.2	Weibullverteilung	67
9.3	Gammaverteilung	68
9.4	Exponentialverteilung	68
9.5	Fisher-Tippett-Verteilung	69

Tabellenverzeichnis

6.1	Spartensegmentierung	38
6.2	Netto-Markt-Standardabweichungen	40
6.3	Werte der Korrelation der Verluste der zwölf Sparten	41
6.4	Prämieneinnahmen des Unternehmens	42
7.1	99,5% Perzentile der Verteilungen	47
7.2	Vergleich Standardmodell mit verschiedenen Verteilungen	50
7.3	Vergleich Standardmodell mit Gumbel-Copula	53
7.4	Vergleich Standardmodell und Gumbel-Copula	54
7.5	Vergleich Copula-Ansatz und Varianz-Kovarianz-Ansatz	55
7.6	Vergleich Standardmodell mit verschiedene Ansätzen	55
7.7	niedrige Abh. Abhängigkeit wie Standardmodell hohe Abh.	56
7.8	niedrige Abh. Abhängigkeit wie Standardmodell hohe Abh.	56
7.9	Vergleich Praxisbeispiel und Standardmodell	57
7.10	Vergleich Praxisbeispiel mit Varianz-Kovarianz-Ansatz und Copula-Ansatz	58
7.11	Vergleich Praxisbeispiel mit Copula-Ansatz und Standardmodell	58
9.1	Tabelle mit verschiedenen Verteilungen Teil 1	63
9.2	Tabelle mit verschiedenen Verteilungen Teil 2	64
9.3	Tabelle mit verschiedenen Verteilungen Teil 3	65
9.4	Tabelle mit Diversifikationseffekten in Prozent	66

Abkürzungs- und Symbolverzeichnis

Abkürzung	Bedeutung
BaFin	Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht
Lognormalverteilung	Logarithmische Normalverteilung
<i>QIS5</i>	the Fifth Quantitative Impact Study (fünfte quantitative Auswirkungsstudie)
<i>SCR</i>	Solvenzkapitalbedarf
<i>SCR_p</i>	Kapitalbedarf für das Prämienrisiko
<i>TVaR</i>	Tail Value at Risk
<i>VaR</i>	Value at Risk
<i>VaR_α</i>	Value at Risk zum Konfidenzniveau $(1 - \alpha)$
Symbole	Bedeutung
$Cov(X, Y)$	Kovarianz
$Corr(X, Y), \rho(X, Y)$	(Pearsonscher) Korrelationskoeffizient
$E(X)$	Erwartungswert von X
F	(beliebige) Verteilungsfunktion
F^{-1}	Quantilfunktion, inverse Verteilungsfunktion
\inf	Infimum einer Menge
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen
$Var(X)$	Varianz
φ	Generator einer archimedischen Copula
$\varphi^{[-1]}$	Pseudo-Inverse eines archimedischen Generators
W^n	n -dimensionale untere Fréchet-Hoeffding-Schranke
(x_1, \dots, x_n)	n -dimensionaler Zeilenvektor
$X \sim F$	Zufallsvariable X besitzt Verteilung F
$Y \sim X$	Zufallsvariable Y besitzt dieselbe Verteilung wie die Zufallsvariable X
\mathbb{Z}	Menge der ganzen Zahlen

Einführung

Solvency II ist auf EU-Ebene derzeit ein wichtigste Projekt im Bereich der Versicherungsaufsicht. Leitgedanke hierbei ist der Schutz der Versicherungsnehmer. Ein weiteres Hauptziel ist die Schaffung von einheitlichen Wettbewerbsstandards im Versicherungssektor des europäischen Binnenmarktes, um damit eine weitgehend einheitliche Aufsichtspraxis in Europa zu gewährleisten. Im Rahmen des Projektes Solvency II gibt es bereits einen Entwurf für die Neuregelung der Solvabilitätsvorschriften, also die Höhe des Solvenzkapitalbedarfs (SCR = Solvency Capital Requirement), wobei dieser noch geändert werden kann. Die Wahrscheinlichkeit von Insolvenzen von Versicherungsunternehmen soll durch eine risikoadäquate Solvenzkapitalanforderung gering gehalten werden, d.h. das Solvenzkapital (oder auch Risikokapital) sollte ausreichen, um Verluste abzufedern. Somit wird der Fortbestand der Versicherungsunternehmen gesichert, damit diese auch zukünftig ihren Verpflichtungen aus den Versicherungsverträgen nachkommen können.

Um das SCR nach Solvency II Richtlinie zu berechnen, stehen die Versicherungsunternehmen in der Umsetzung dieser Anforderungen vor der Wahl, mit dem Standardmodell oder einem internen Modell zu arbeiten.

Im ersten Modell, welches in wesentlichen Teilen von der Aufsicht vordefiniert ist, erfolgt die Ermittlung des SCR's durch vorgegebene, standardisierte Berechnungsmethoden, in denen vereinfachende Annahmen getroffen werden.

In der Regel benötigt das Versicherungsunternehmen in seiner Gesamtheit, wegen Risikodiversifikationen (Diversifikation = Streuung), weniger Risikokapital als bei Aufsummierung des Risikokapitals der isoliert betrachteten Geschäftssegmente. Risikodiversifikation bedeutet, dass ein Versicherungsunternehmen möglichst viele unabhängige oder schwach abhängige Risiken in seinem Bestand halten sollte. Somit treten Diversifikationseffekte auf, welche im Standardmodell bis in die Parametrisierung vorgegeben sind. Dies kann aber auch bedeuten, dass diese Vorgaben nicht für jedes Unternehmen angemessen sind.

In dieser Arbeit soll untersucht werden, ob sich das Standardmodell zur Berechnung des SCR's eignet, wenn andere Voraussetzungen, als im Standardmodell festgelegt, gegeben sind und wie sich dabei die Diversifikation verändert.

Die Kriterien zur Eignung des Standardmodells sind aus aufsichtsrechtlicher Sicht und aus Sicht des Versicherungsunternehmens verschieden. Das Versicherungsunternehmen hat das Ziel möglichst wenig Kapital zu binden und trotzdem die Richtlinie nach Solvency II zu erfüllen. Deshalb ist das Standardmodell aus Sicht des Versicherungsunternehmens geeignet, wenn bei der Berechnung mit realen Daten das SCR genauso hoch wie im Standardmodell oder höher ausfällt.

Die Aufsicht hat das Hauptziel den Versicherungsnehmer zu schützen. Deshalb ist das Standardmodell aus Sicht der Aufsicht geeignet, wenn bei der Berechnung mit realen Daten das SCR genauso hoch wie im Standardmodell oder niedriger ausfällt.

Damit die mit dem Standardmodell berechneten Werte untersucht werden können, braucht man reale Daten, um die Randverteilungen zu erhalten. Des Weiteren werden die Daten zur Analyse von Abhängigkeiten gebraucht. Diese bestimmen, bei der Simulation mit dem Copula-Ansatz, die Wahl einer passenden Copula. Die realen Daten sind jedoch meist nicht gut genug, um ein realitätsnahes stochastisches Modell daraus abzuleiten. Zur Analyse von Abhängigkeiten eignen sie sich oft nicht mehr, vor allem, weil meist zu wenig Informationen zur Abhängigkeit von sehr seltenen Großschäden vorhanden sind. Daher wird in dieser Arbeit durch praxisnahe Annahmen von Randverteilungen und Abhängigkeitsstrukturen eine „reale“ Risikolage eines Unternehmens simuliert und die daraus resultierenden Werte mit dem SCR nach Standardansatz verglichen und ausgewertet.

Dabei beschränkt sich diese Arbeit auf die Betrachtung des SCR's für das Prämienrisiko, um auswerten zu können, ob und wie sich die Werte schon in solch einem kleinen Teil der Gesamtberechnung verändern. Die Berechnung erfolgt in ReMetrica.

Das Prämienrisiko wird als unerwarteter Verlust mit großem Ausmaß definiert, der entsteht, wenn die eingenommenen Prämien die Schadenaufwendungen, die aus Gründen der Unsicherheit bzgl. Zeitpunkt, Häufigkeit und Höhe von Versicherungsfällen entstehen, nicht überdecken können.[35]

ReMetrica ist eine Software für dynamische Finanzanalysen und Kapitalmodelle. Mit dieser Software kann man das gesamte Spektrum der Risikofinanzierung, mit Stochastischen und Szenario-Funktionen, bewerten. Dank einer umfassenden Sammlung an vorbereiteten Komponenten lassen sich in kürzester Zeit transparente Risikomodelle generieren.

Die Arbeit ist folgendermaßen aufgebaut.:

Die benötigten theoretischen Grundlagen werden im ersten bis dritten Kapitel dokumentiert.

Dabei beschäftigt sich das erste Kapitel mit Risikomaßen, wie diese definiert sind und welche Eigenschaften ein gutes Risikomaß besitzen sollte. Des Weiteren werden zwei Risikomaße vorgestellt, und zwar der Value at Risk und der Tail Value at Risk; und verschiedene Arten von Diversifikation erläutert.

Im zweiten Kapitel werden verschiedene Abhängigkeitskonzepte behandelt, wobei als Erstes die lineare Korrelation vorgestellt wird.

Als Nächstes wird das Konzept der Copulas erläutert. Dafür wird die Definition der Copula und der Satz von Sklar eingeführt. Des Weiteren wird die Klasse der elliptischen Copulas und ein sehr bekannter Vertreter dieser Klasse, die Gauß-Copula, kurz vorgestellt. Danach wird die Klasse der archimedischen Copulas behandelt. Als bekannte

Vertreter dieser Klasse werden die Gumbel-Copula und die Clayton-Copula aufgeführt. Als Nächstes wird die Konstruktion von multivariaten archimedischen Copulas erläutert. Anschließend wird ein Rangkorrelationsmaß vorgestellt, welches die monotone Abhängigkeit von Zufallsvariablen misst.

Als Letztes wird in diesem Kapitel die Tail Abhängigkeit behandelt. Mit diesem Abhängigkeitsmaß misst man die asymptotische Abhängigkeit von Zufallsvariablen. Dieses Maß findet in der Praxis oft Verwendung bei Versicherungen, da es gemeinsame Extremereignisse gut darstellt.

Im dritten Kapitel werden die verschiedenen Möglichkeiten zur Berechnung bzw. Simulation des Value at Risk aufgeführt. Als Erstes wird die einfache Berechnung des Value at Risk ohne Berücksichtigung von eventuellen Diversifikationen beschrieben. Danach wird der Varianz-Kovarianz-Ansatz aufgeführt sowie die Monte-Carlo-Simulation und der Copula-Ansatz.

Im vierten und fünften Kapitel wird die praktische Umsetzung erläutert und die simulierten Werte untersucht.

Dabei beschäftigt sich das vierte Kapitel mit den im Standardmodell vorgegebenen komplexen Anforderungen und Formeln zur Berechnung des SCR's für das Prämienrisiko. Des Weiteren wird für ein fiktives Unternehmen das SCR für das Prämienrisiko unter Verwendung des Standardmodells berechnet.

Im fünften Kapitel werden die Auswirkungen verschiedener Veränderungen bei der Simulation in ReMetrica untersucht und ausgewertet. Dabei werden zuerst die Umsetzung und Annahmen in ReMetrica erläutert. In ReMetrica wird das SCR für das Prämienrisiko als Gesamtrisikokapital bezeichnet und mit dem Varianz-Kovarianz-Ansatz und dem Copula-Ansatz simuliert. Dabei werden speziell die Verteilungen der Risiken variiert und die Auswirkungen auf das Gesamtrisikokapital und der daraus resultierenden Diversifikation untersucht und ausgewertet. Außerdem werden die Abhängigkeiten untereinander verändert und dabei untersucht, ob und wie diese den Diversifikationseffekt beeinflussen. Des Weiteren wird an einem Beispiel gezeigt, wie sich verschiedenen Verteilungen mit verschiedenen Simulationsansätzen auf das Gesamtrisikokapital und die Diversifikationseffekte auswirken können.

1 Theoretische Grundlagen

2 Risikomaß

Risikomaße werden dazu verwendet, um Risiken quantifizierbar machen zu können.

2.1 Definition

Ein Risikomaß ist eine Abbildung

$$X \mapsto \rho(X) = \rho(F_X),$$

die einem Risiko X mit zugehöriger Verteilungsfunktion F_X eine reelle Zahl zuordnet. Unter Risiko versteht man die Abweichung von einem erwarteten Wert.

2.2 Kohärentes Risikomaß

Ein Risikomaß heißt kohärent, falls es die folgende Eigenschaften erfüllt:

- **Monotonie:** Ein Risikomaß ρ heißt monoton, wenn gilt:

$$\rho(X_1) \geq \rho(X_2) \quad \text{für} \quad X_1 \geq X_2.$$

- **Positive Homogenität:** Ein Risikomaß ρ heißt positiv homogen, wenn für jedes Risiko gilt:

$$\rho(\lambda \cdot X) = \lambda \cdot \rho(X) \quad \text{für} \quad \lambda > 0.$$

- **Translationsinvarianz:** Ein Risikomaß ρ heißt translationsinvariant, wenn für jedes Risiko gilt:

$$\rho(X + c) = \rho(X) + c \quad \text{für} \quad c \in \mathbb{R}.$$

- **Subadditivität:** Ein Risikomaß ρ heißt subadditiv, wenn für je zwei Risiken gilt:

$$\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2).$$

Monotonie bedeutet, dass X_2 im Vergleich mit X_1 als weniger oder höchstens gleich riskant eingestuft wird, wenn in jeder Situation bei X_2 im Vergleich zu X_1 grundsätzlich

immer kleinere oder höchstens gleiche Verluste auftreten.

Homogenität bedeutet, dass ein Schaden, der sich als λ -faches eines anderen Schadens darstellt, auch als λ -mal so riskant eingestuft wird. Nicht für alle Arten von Risiken ist dies selbstverständlich.

Translationsinvarianz bedeutet, dass die Erhöhung des Verlustes um den Betrag c zu einer Erhöhung des Risikowertes um genau diesen Betrag führt.

Subadditivität bedeutet, dass durch eine Zusammenfassung von zwei Risiken niemals zusätzliches Risiko entstehen kann, sondern sich das Gesamtrisiko eher vermindert. Dies entspricht dem bekannten Prinzip der Risikodiversifikation, ist aber nicht in jeder Situation selbstverständlich.

[3] [16]

2.3 Beispiele von Risikomaßen

2.3.1 Value at Risk

Der Value at Risk beschreibt den Betrag einer im Versicherungsunternehmen definierten Risikoposition, zu einem Konfidenzniveau von $(1 - \alpha)$ bezogen auf einen Einjahreszeitraum, wobei nur mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens α dieser Wert überschritten werden kann. Die in der Praxis übliche Werte für α sind: 0,05; 0,01; oder 0,005.

Dies bedeutet, dass Versicherungen Eigenmittel in einem Umfang zurücklegen sollen, der sie befähigt, in 199 von 200 Jahren Verluste ohne einen vollständigen Verbrauch ihrer Eigenmittel verkraften zu können. [13]

Vereinfacht könnte man auch sagen, dass die einjährige Insolvenzwahrscheinlichkeit dadurch auf $(1 - 0,995) * 100\% = 0,5\%$ festgelegt wird.

Definition 1

Das $(1 - \alpha)$ -Quantil $\alpha \in (0, 1)$ ist durch die Formel

$$q_{1-\alpha}(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) \geq 1 - \alpha\}$$

gegeben, wobei F_X die Verteilungsfunktion einer reellen Zufallsvariable X ist.

Der Value at Risk $VaR_\alpha(X)$ entspricht aus statistischer Sicht dem $1 - \alpha$ -Quantil der Wahrscheinlichkeitsverteilung des Risikos X . Im Spezialfall, dass F_X invertierbar ist, ergibt sich:

$$VaR_\alpha(X) = F_X^{-1}(1 - \alpha).$$

2 Risikomaß

In der Praxis wird der Value at Risk als Risikomaß oft benutzt. Jedoch besitzt er den Nachteil, nur in bestimmten Fällen kohärent zu sein.

Das Risikomaß $VaR_\alpha(X)$ ist monoton, positiv homogen und translationsinvariant. Es erfüllt die Bedingung der Subadditivität nur für bestimmte Verteilungstypen wie etwa elliptische Verteilungen.

Beweis: Es seien $c, \lambda \in \mathbb{R}$ und X, Y beliebige Zufallsvariablen.

Monotonie:

Es gelte $X \geq Y$ fast überall. Dann gilt $F_X(x) = P(X \leq x) \leq P(Y \leq x) = F_Y(x)$ und daher $\{x : F_X(x) \geq 1 - \alpha\} \subseteq \{x : F_Y(x) \geq 1 - \alpha\}$. Es folgt:

$$VaR_\alpha(X) = \inf\{x : F_X(x) \geq 1 - \alpha\} \geq \inf\{x : F_Y(x) \geq 1 - \alpha\} = VaR_\alpha(Y).$$

Positive Homogenität:

Für $\lambda = 0$ gilt die Homogenitätseigenschaft trivialerweise. Ist $\lambda > 0$, so gilt:

$$\begin{aligned} F_{\lambda X}(x) &= P(\lambda X \leq x) \\ &= P(X \leq \frac{x}{\lambda}) \\ &= F_X(\frac{x}{\lambda}). \end{aligned}$$

Somit folgt:

$$\begin{aligned} VaR_\alpha(\lambda X) &= \inf\{x : F_{\lambda X}(x) \geq 1 - \alpha\} \\ &= \inf\{x : F_X(\frac{x}{\lambda}) \geq 1 - \alpha\} \\ &= \inf\{\lambda x : F_X(x) \geq 1 - \alpha\} \\ &= \lambda \inf\{x : F_X(x) \geq 1 - \alpha\} \\ &= \lambda VaR_\alpha(X). \end{aligned}$$

Translationsinvarianz:

Offenbar gilt:

$$F_{X+c}(x) = P(X + c \leq x) = P(X \leq x - c) = F_X(x - c).$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
 VaR_\alpha(X + c) &= \inf\{x : F_{X+c}(x) \geq 1 - \alpha\} \\
 &= \inf\{x : F_X(x - c) \geq 1 - \alpha\} \\
 &= \inf\{x + c : F_X(x) \geq 1 - \alpha\} \\
 &= c + \inf\{x : F_X(x) \geq 1 - \alpha\} \\
 &= VaR_\alpha(X) + c.
 \end{aligned}$$

□

[3] [22] [13] [16]

2.3.2 Tail Value at Risk

Für den Fall, dass der Value at Risk überschritten wird, ist der Tail Value at Risk definiert als der Erwartungswert aller Verluste, die größer sind als der Value at Risk.

Der Tail Value at Risk (TVaR) oder auch Expected Shortfall (ES) ist im Gegensatz zum VaR kohärent, da er die Subadditivitätseigenschaft erfüllt. Diese Eigenschaft gilt allerdings im Allgemeinen nicht für die Zufallsvariablen X_1, X_2 mit Verteilungsfunktionen, die Sprünge haben.

Für eine Zufallsvariable des Verlustes X gilt:

Definition 2

Sei $\alpha \in (0, 1)$ und X eine reelle Zufallsvariable. Dann heißt:

$$TVaR_\alpha(X) = E[X | X \geq VaR_\alpha(X)] = \frac{1}{\alpha} \int_{1-\alpha}^1 F_X^{-1}(x) dx = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha VaR_u(X) du.$$

der Tail Value at Risk (zum Niveau α) von X .

Im Gegensatz zum VaR wird auch die Höhe der extremen Verluste berücksichtigt. Außerdem ist der Tail Value at Risk immer größer oder gleich dem Value at Risk zum gleichen Konfidenzniveau.

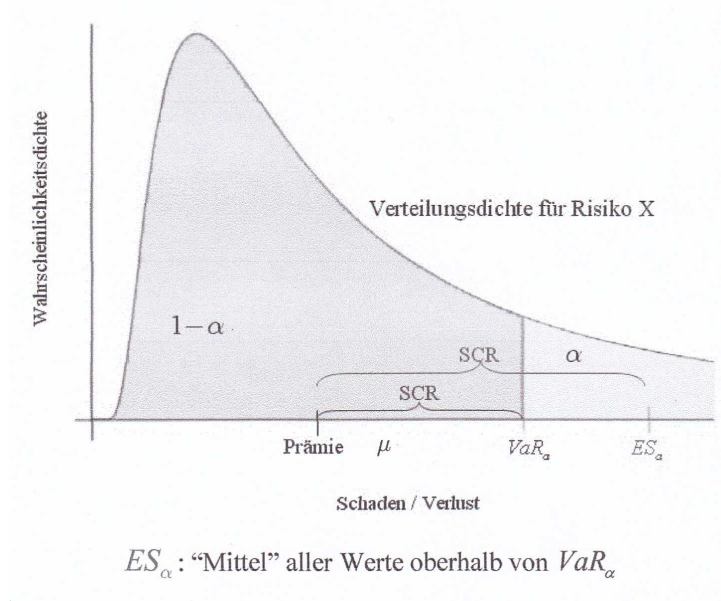


Abbildung 2.1: Darstellung des Value at Risk [22]

[3] [22] [16]

2.4 Diversifikation

Allgemeiner betrachtet, also für eine beliebige Anzahl von Risiken und unterschiedlichen Verlustverteilungen, ist der Diversifikationseffekt folgendermaßen definiert:

Definition 3

Es sei $\rho : M(\Omega, \mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}, X \mapsto \rho(X)$ ein Risikomaß. Wir betrachten ein Gesamtsystem mit mehreren Teilrisiken, die durch die Verlustvariablen $X_i \in M(\Omega, \mathbb{R}) (i \in 1, \dots, m)$ beschrieben werden. Dann ist der Diversifikationseffekt des Gesamtsystems $\{X_1, \dots, X_m\}$ bezüglich ρ durch:

$$\text{Diversifikationseffekt} = \sum_{i=1}^m \rho(X_i) - \rho\left(\sum_{i=1}^m X_i\right)$$

gegeben.

Satz 1

Der Diversifikationseffekt ist für kohärente Risikomaße nie negativ.

Beweis 1: Dies folgt direkt aus der Subadditivität $\rho\left(\sum_{i=1}^m X_i\right) \leq \sum_{i=1}^m \rho(X_i)$.

□

Bei vorgegebenem Risikomaß ρ hängt der Diversifikationseffekt von der Abhängigkeitsstruktur der Teilrisiken X_i ab.

Risikodiversifikationseffekte können realisiert werden, wenn der Korrelationskoeffizient zweier Risikofaktoren kleiner als 1 ist. Eine besonders hohe Risikodiversifikation erhält man, wenn die Risiken negativ miteinander korreliert sind. Ob ein positiver Diversifikationseffekt eintritt, hängt sowohl vom System der Zufallsvariablen als auch vom Risikomaß ab. Einen negativen Diversifikationseffekt kann es zum Beispiel beim Value at Risk geben, da dieser nur in bestimmten Fällen kohärent ist.

Es gibt verschiedene Arten von Diversifikation, die in [12] oder [32] nachgelesen werden können. Hier soll nur kurz die naive Diversifikation vorgestellt werden. Die systematische Diversifikation nach Markowitz wird hier nicht behandelt, da eine etwas abgewandelte Form schon im Kapitel 4.2 erläutert wird.

Bei der naive Diversifikation wird unterstellt, dass jede Anlage den gleichen Anteil am Portfolio besitzt, also: $x_i = 1/n$. Je größer die Anzahl der Anlagen ist, desto kleiner ist jeder Anteil im Gesamtportfolio.

Für die Varianz eines naiv diversifizierten Portfolios gilt:

$$\sigma^2(n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^2} \sigma_i^2 + \sum_{i \neq j} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \sigma_{i,j}. \quad (2.1)$$

Damit hängt die Portfoliovarianz von der durchschnittlichen Varianz und der durchschnittlichen Kovarianz des Portfolios ab.

Wenn man die Anzahl der Anlagen gegen unendlich gehen lässt, so geht der erste Teil der Gleichung gegen 0, d.h. für große n hängt damit die Portfoliovarianz im Wesentlichen von der durchschnittlichen Kovarianz ab.

[16] [8]

3 Abhängigkeitsmodellierung

In diesem Kapitel werden einige Möglichkeiten vorgestellt, Abhängigkeiten von Zufallsvariablen zu messen. Oft werden die Begriffe Abhängigkeit, Zusammenhang und Korrelation als Synonyme benutzt, obwohl sie verschiedene Bedeutungen besitzen. Der Begriff der Abhängigkeit verkörpert in diesem Sinn das allgemeinste Konzept. Abhängigkeiten von Risiken können durch einzelne Kennzahlen quantifiziert werden, die ganz bestimmte Aspekte der Abhängigkeit berücksichtigen. Dazu gehören Korrelationskoeffizienten, Rangkorrelationskoeffizienten sowie der Tail-Abhängigkeitskoeffizient. Abhängigkeiten können auch durch Copulas modelliert werden.

[3]

3.1 Lineare Korrelationen

Die Korrelation stellt das am häufigsten verwendete Maß zur Modellierung von Abhängigkeiten zwischen Zufallsvariablen dar. Die Stärke des linearen Zusammenhangs zwischen zwei Zufallsvariablen wird durch den Korrelationskoeffizienten ausgedrückt. Er nimmt Werte im Intervall von $[-1, +1]$ an.

Bei einem Wert von $+1$ besteht ein vollständig positiver linearer Zusammenhang zwischen den betrachteten Merkmalen. Bei einem Wert von -1 ein vollständig negativer linearer Zusammenhang. Wenn der Korrelationskoeffizient den Wert 0 besitzt, hängen die beiden Merkmale nicht linear voneinander ab. Allerdings können diese Merkmale trotzdem in anderer Weise voneinander abhängen.

[16]

Korrelationskoeffizientenberechnung nach Pearson

Das bekannteste Maß der Abhängigkeit zwischen zwei Zufallsvariablen ist der Pearson's Korrelationskoeffizient. Dieses Maß wird dargestellt als:

$$\text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \cdot \text{Var}(Y)}},$$

wobei die Kovarianz von X und Y gegeben ist durch:

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))] = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y).$$

Somit ist die Korrelation also die durch das Produkt der Standardabweichung normierte Kovarianz, wobei gilt: $\rho(X, Y) \in [-1; 1]$.

[3] [10]

3.2 Copula

Mit Copulas werden Abhängigkeiten zwischen verschiedenen Zufallsvariablen beschrieben, die durch Randverteilungen repräsentiert werden.

Definition 4

Eine Copula ist die gemeinsame Verteilungsfunktion eines Zufallsvektors im \mathbb{R}^n dessen Randverteilungen alle gleichverteilt sind. Äquivalent dazu ist eine n -dimensionale Copula eine Funktion $C : [0; 1]^n \rightarrow [0; 1]$, für die folgende drei Eigenschaften gelten müssen:

- $C(u_1, \dots, u_n)$ ist in jeder Komponente $u_i, i = 1, \dots, n$ wachsend.
- $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}, u_i \in [0, 1]$.
- Für alle $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in [0, 1]^n$ mit $a_i \leq b_i$ für $i = 1, \dots, n$ gilt

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_n=1}^2 (-1)^{i_1+\dots+i_n} C(u_{1i_1}, \dots, u_{ni_n}) \geq 0,$$

mit $u_{j1} = a_j$ und $u_{j2} = b_j$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$.

Satz 2 (Satz von Sklar) • Sei F eine multivariate Verteilungsfunktion mit Randverteilungsfunktionen F_1, \dots, F_n . Dann gibt es eine Copula $C : [0; 1]^n \rightarrow [0; 1]$, sodass für alle $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ gilt:

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)).$$

Wenn F_1, \dots, F_n stetig sind, dann ist C eindeutig bestimmt.

- Umgekehrt gilt: Ist C eine Copula und sind F_1, \dots, F_n eindimensionale Verteilungsfunktionen, dann ist die durch

$$F(x_1, \dots, x_n) := C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$$

definierte Verteilung eine multivariate Verteilung, die genau die vorgegebenen Randverteilungsfunktionen besitzt.

Beweis siehe Nielhof [21] S.11 ff.

Die erste Aussage besagt, dass sich jede beliebige Verteilung, in ihre Randverteilungen einerseits und ihre Copula andererseits, zerlegen lässt. Dabei sind in der Copula die Informationen über die Abhängigkeiten zwischen den Randverteilungen enthalten. Man kann mittels Copula eine gewünschte Abhängigkeitsstruktur wählen und diese mit beliebigen, gewünschten Randverteilungen kombinieren. Wenn die einzelnen Randverteilungen stetig sind, dann ist die Copula sogar eindeutig bestimmt.

Umgekehrt gibt die zweite Aussage des Satzes von Sklar eine Methode an, mit der aus n Einzelverteilungen eine einzige gemeinsame Verteilung gewonnen werden kann. Dazu

3 Abhängigkeitsmodellierung

setzt man die einzelnen Verteilungsfunktionen in eine Copula ein. Die daraus resultierende Funktion F ist dann tatsächlich eine Verteilungsfunktion, die außerdem die wichtige Eigenschaft besitzt, dass sie die vorgegebenen Einzelverteilungen als Randverteilung reproduziert.

Die zweite Aussage des Satzes ist aus Sicht des Risikomanagement einer der Hauptgründe, die für den Einsatz von Copulas sprechen. Sie gestattet es, die Modellierung des gemeinsamen Risikos in zwei getrennte Schritte aufzuteilen:

- Modellierung der Einzelrisiken, d.h. der Verteilungen F_1, \dots, F_n .
- Wahl des geeigneten Copula-Modells C , das alle Informationen über die Abhängigkeiten zwischen den Einzelrisiken enthält.

Bei einer Zusammenfassung von Risiken mittels Copulas gehen keine Informationen über die Einzelrisiken verloren, da die Einzelverteilungen als Randverteilungen von F erhalten bleiben.

Mit $u_i := F_i(x_i)$, $1 \leq i \leq n$ folgt aus dem Satz von Sklar:

Theorem 1

Sei F eine n -dimensionale Verteilungsfunktion mit stetigen Randverteilungen F_1, \dots, F_n und Copula C . Dann gilt für alle $u = (u_1, \dots, u_n) \in [0; 1]^n$:

$$C(u_1, \dots, u_n) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n)).$$

Somit ist es möglich, zu einer vorgegebenen Verteilungsfunktion F und Randverteilungen F_1, \dots, F_n , die Copula C zu finden. Das heißt, die Copula erhält man, indem die Quantilfunktionen der Verteilungen der Einzelrisiken in die gemeinsame Verteilungsfunktion eingesetzt werden.

Satz 3

Für jede Copula $C : [0; 1]^n \rightarrow [0; 1]$ gilt:

$$\max\{\sum_{i=1}^n u_i - n + 1, 0\} \leq C(u_1, \dots, u_n) \leq \min\{u_1, \dots, u_n\}.$$

Die untere Schranke, die gewöhnlich mit $W(u_1, \dots, u_n)$ bezeichnet wird, wird auch untere Fréchet-Hoeffding-Schranke genannt.

Die obere Schranke, die gewöhnlich mit $M(u_1, \dots, u_n)$ bezeichnet wird, nennt man auch obere Fréchet-Hoeffding-Schranke.

Beweis siehe [5] S.13.

3 Abhängigkeitsmodellierung

Bemerkung 1:

$M(u_1, \dots, u_n) = \min(u_1, \dots, u_n)$ ist für alle $n \geq 2$ eine Copula.

Für $n = 2$ ist $W(u_1, u_2) = \max\{u_1 + u_2 - 1, 0\}$ eine Copula.

Für $n \geq 3$ ist $W(u_1, \dots, u_n) = \max\{\sum_{i=1}^n u_i - n + 1, 0\}$ keine Copula.

Copulas lassen sich grundsätzlich in drei Gruppen unterteilen:

- Fundamentale Copulas ohne Abhängigkeitsparameter, die wichtige Spezialfälle der Abhängigkeitsstrukturen darstellen. Die wichtigsten Beispiele dieser Kategorie sind die Unabhängigkeitscopula, Komotonicopula und die Kontramotonicopula.
- Implizite Copulas, die mittels des Satzes von Sklar aus bekannten multivariaten Verteilungen abgeleitet werden und nicht notwendigerweise eine geschlossene Form besitzen wie die elliptischen Copulas.
- Explizite Copulas, die eine einfache geschlossene Form haben und einem allgemeinen mathematischen Bildungsgesetz folgen wie die Archimedischen Copulas.

Die Unabhängigkeitscopula oder auch Produktcopula ist eine Copula, welche man bei unabhängigen Zufallsvariablen erhält.

Definition 5

Die Produktcopula ist für $u = (u_1, \dots, u_n)$ definiert als

$$\prod(u) = u_1 \cdot \dots \cdot u_n.$$

Für den 2-dimensionalen Fall wird der Graph der Produktcopula $\prod^2(u, v)$ in der Abbildung dargestellt.

Lemma 1

Sei (X_1, \dots, X_n) ein Vektor mit stetigen Zufallsvariablen und Copula C .

X_1, \dots, X_n sind genau dann unabhängig, falls $C = \prod^n$ gilt.

Beweis: Der Beweis folgt direkt aus Sklar's Theorem und der Tatsache, dass die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n genau dann unabhängig sind, falls $F(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \cdot \dots \cdot F_n(x_n)$ für alle $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ gilt.

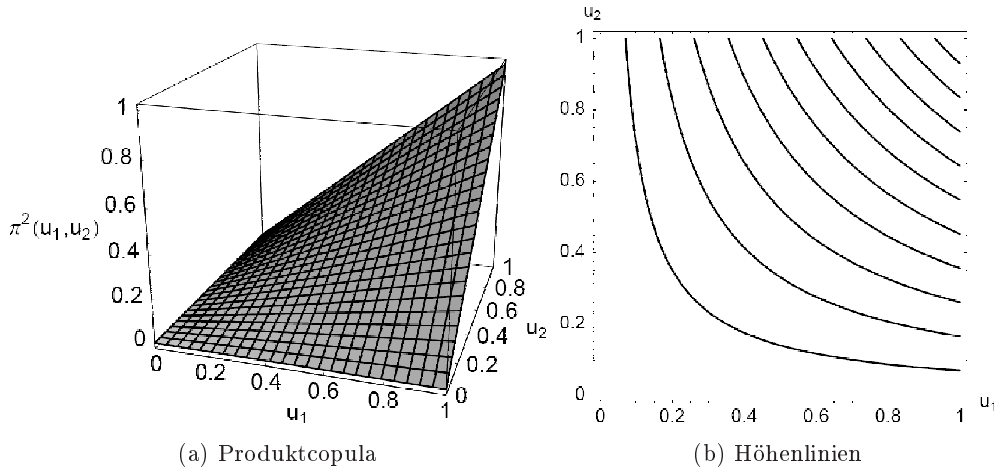


Abbildung 3.1: Produktcopula

[3] [5] [21] [27] [30] [16]

3.2.1 Elliptische Copula

Die Klasse der elliptischen Verteilungen liefert eine große Menge an gemeinsamen Verteilungsfunktionen, welche die Eigenschaften der multivariaten Normalverteilung besitzen. Elliptische Copulas sind die Copulas der elliptischen gemeinsamen Verteilungsfunktion. Diese Copulas ermöglichen eine einfache Berechnung der Rangkorrelationskoeffizienten und der Tail-Abhängigkeit, da sie einfach zu simulieren sind.

Gauß-Copula

Die Gauß-Copula (Normal-Copula) ist die Copula der multivariaten Normalverteilung. Sei \mathbf{u} ein Vektor mit n normalverteilten Werten \mathbf{x} , so dass $(u_1, \dots, u_n) = (F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$, wobei F_i die Verteilungsfunktion einer Normalverteilung darstellt. Die Gauß-Copula ist definiert als:

$$C_R^{Ga}(\mathbf{u}) = \Phi_n(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n)),$$

wobei Φ_n die gemeinsame Verteilungsfunktion einer n -dimensionalen Standardnormalverteilung mit Korrelationsmatrix R und Φ^{-1} die Quantilsfunktion der univariaten Standardnormalverteilung ist. Die Gauß-Copula gehört zu den elliptischen Copulas, da die Normalverteilung eine elliptische Verteilung ist.

Im bivariaten Fall gilt:

$$C^{Ga}(u, v) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{s^2 - 2\rho st + t^2}{2(1-\rho^2)}\right) ds dt,$$

wobei ρ dem Korrelationskoeffizienten nach Pearson entspricht.

Das Problem bei elliptischen Copulas besteht darin, dass sie von der inversen Verteilungsfunktion abhängen, die selten in expliziter Form vorliegt, da die gemeinsame Verteilungsfunktion und die inversen Randverteilungen nur eine Integraldarstellung besitzen. Deshalb stellt die Klasse der Archimedischen Copulas eine wichtige Alternative dar. [16] [30]

3.2.2 Archimedische Copula

Eine interessante und wichtige Familie von Copulas sind die archimedischen Copulas. Sie haben viele positive Eigenschaften, sind einfach durch Generatorfunktionen zu konstruieren und es lassen sich viele unterschiedliche Abhängigkeitsstrukturen modellieren. Die archimedischen Copulas haben alle eine geschlossene Form und sind im Gegensatz zu den elliptischen Copulas nicht von Sklar's Theorem abgeleitet.

Eine archimedische Copula hängt von ihrem univariaten Generator ab. Um diesen definieren zu können, führen wir zunächst die Pseudo-Inverse ein.

Definition 6

Sei φ eine stetige und konvexe Funktion $\varphi : [0; 1] \rightarrow [0; \infty]$, sodass $\varphi(1) = 0$ und $\varphi(0) \leq \infty$. Die Pseudo-Inverse von φ ist die Funktion $\varphi^{[-1]} : [0; \infty] \rightarrow [0; 1]$, welche gegeben ist durch:

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t) & \text{falls } 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ 0, & \text{falls } \varphi(0) \leq t \leq \infty. \end{cases}$$

Bemerkung 2:

Folglich ist $\varphi^{[-1]}$ stetig und monoton fallend auf $[0; \infty]$ und streng monoton fallend auf $[0; \varphi(0)]$. Es gilt $\varphi^{[-1]}(\varphi(u)) = u$ auf $[0; 1]$ und

$$\varphi(\varphi^{[-1]}(t)) = \begin{cases} t, & \text{falls } 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ \varphi(0), & \text{falls } \varphi(0) \leq t \leq \infty. \end{cases}$$

Falls $\varphi(0) = \infty$, so gilt $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$.

Um mit einem Generator eine Copula zu definieren, muss die Bedingung gelten die im folgenden Satz beschrieben ist.

Satz 4

Sei $\varphi : [0; 1] \rightarrow [0; \infty]$ eine stetige und streng monoton fallende Funktion mit $\varphi(1) = 0$ und sei $\varphi^{[-1]}$ die Pseudo-Inverse von φ . Die Funktion $C : [0; 1]^2 \rightarrow [0; 1]$ sei definiert durch

$$C(u_1, u_2) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \varphi(u_2)). \quad (3.1)$$

C ist genau dann eine Copula, wenn φ konvex ist.

Beweis siehe [17].

Somit kann die archimedische Copula definiert werden.

Definition 7

Copulas der Form 3.1 nennt man archimedische Copulas. Die Funktion φ heißt Generator der Copula. Ein solches φ heißt strikter Generator, falls $\varphi(0) = \infty$ und $C(u_1, u_2) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \varphi(u_2))$ nennt man eine strikte Copula.

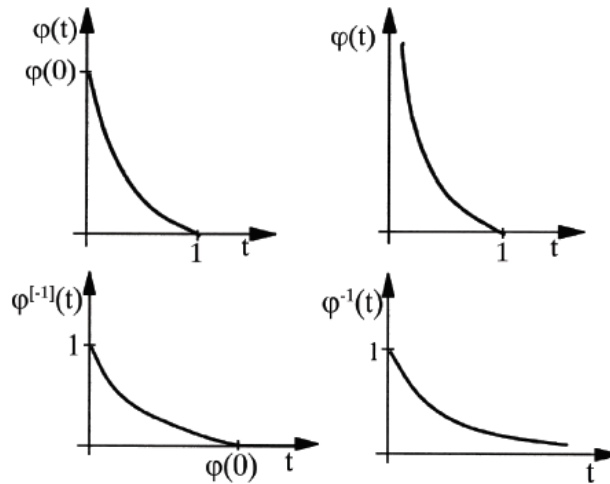


Abbildung 3.2: Generator

strikter Generator [17]

Wichtigster Spezialfall:

$$\varphi(x) = -\ln x$$

mit

$$C(u_1, \dots, u_n) = \varphi^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \varphi(u_i) \right) = \exp \left(\sum_{i=1}^n \ln u_i \right) = \prod_{i=1}^n u_i$$

entsteht die Unabhängigkeitscopula.

Das Interessante am univariaten Generator ist die Tatsache, dass die komplette Information über die mehrdimensionale Abhängigkeitsstruktur der Zufallsvariablen in ihm enthalten ist.

Die archimedischen Copulas haben einige interessante Eigenschaften, die einen einfachen Umgang mit ihnen ermöglichen.

Satz 5

Sei C eine archimedische Copula mit Generator φ , so gilt:

3 Abhängigkeitsmodellierung

- C ist symmetrisch, d.h. für alle $u, v \in I$ gilt: $C(u, v) = C(v, u)$
- C ist assoziativ, d.h. für alle $u, v, w \in I$ gilt: $C(C(u, v), w) = C(u, C(v, w))$

Beweis 2: • Der erste Punkt ergibt sich direkt aus der Definition der archimedischen Copula.

- Für $(\varphi(u) + \varphi(v) + \varphi(w)) \leq \varphi(0)$ gilt offensichtlich

$$\begin{aligned} C(C(u, v), w) &= \varphi^{[-1]}(\varphi(\varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)) + \varphi(w)) \\ &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v) + \varphi(w)) \\ &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(\varphi^{[-1]}(\varphi(v) + \varphi(w)))) \\ &= C(u, C(v, w)). \end{aligned}$$

Dies gilt ebenfalls für $(\varphi(u) + \varphi(v) + \varphi(w)) \geq \varphi(0)$, denn in diesem Fall gilt

$$C(C(u, v), w) = C(u, C(v, w)) = 0. \quad (3.2)$$

□

Satz 6 (Theorem 4.3.4 Nelson)

Sei C eine archimedische Copula mit Generator φ und sei $K_C(t)$ das C -Maß der Menge $\{(u, v) \in I^2 | C(u, v) \leq t\}$ beziehungsweise der äquivalenten Menge $\{(u, v) \in I^2 | \varphi(u) + \varphi(v) \geq \varphi(t)\}$. Dann gilt für jedes $t \in I$

$$K_C(t) = t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t^+)}, \quad (3.3)$$

wobei φ^+ die rechtsseitige Ableitung von φ im Punkt t darstellt.

Beweis siehe [17] S. 102.

Lemma 2

Der Zufallsvektor $(U, V)^T$ habe als Verteilungsfunktion die archimedische Copula C mit Generator φ . Dann ist die Funktion K_C , gegeben in 3.3, die Verteilungsfunktion von $C(U, V)$.

[25] [17] [21]

Kendall's τ für archimedische Copulas

Für archimedische Copulas lässt sich mithilfe des letzten Lemmas zeigen, dass man Kendall's τ nur in Abhängigkeit vom Generator darstellen kann. Dies stellt in den meisten Fällen eine Vereinfachung dar, da der Generator im Gegensatz zur Copula von nur einer Variablen abhängt. Kendall's τ lässt sich für archimedische Copulas folgendermaßen berechnen.

Satz 7

Sei $(X_1, X_2)^T$ ein Zufallsvektor mit stetigen Randverteilungen und einer archimedischen Copula C mit Generator φ . Dann ist Kendall's τ gegeben durch:

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt.$$

Beweis siehe [21] S.59.

Gumbel-Copula

Für die Gumbel-Copula existiert eine einfache explizite Darstellungsweise, womit die Berechnung ohne den Einsatz aufwändiger numerischer Integrationsmethoden möglich ist.

Definition 8

Sei

$$\varphi_\theta(t) = \begin{cases} (-\ln t)^\theta, & \text{für } t \in (0, 1] \\ \infty, & \text{für } t = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

mit $\theta \geq 1$, so ist $\varphi_\theta(t)$ stetig und $\varphi_\theta(1) = 0$.

Für $t \in (0, 1)$ ist φ streng monoton fallend, da

$$\varphi'_\theta(t) = -\theta(-\ln t)^{\theta-1}/t < 0$$

gilt. Weiter ist φ konvex, da

$$\varphi''_\theta(t) = \theta(-\ln t)^{\theta-1}/t^2 + \theta(-\ln t)^{\theta-2}(\theta-1)/t^2 > 0$$

gilt.

Da $\varphi_\theta(0) = \infty$ gilt, ist φ_θ ein strikter Generator.

Mit 3.1 erhalten wir die Gumbel-Copula, die eine strikte Copula ist:

$$C_\theta^{Gu}(u, v) = \varphi_\theta^{-1}(\varphi_\theta(u) + \varphi_\theta(v)) = \exp\{ -[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{1/\theta} \},$$

Für $\theta = 1$ erhalten wir als Spezialfall die Unabhängigkeitscopula und für den Grenzwert $\lim_{\theta \rightarrow \infty} C_\theta^{Gu}$ erhalten wir die obere Fréchet-Hoeffding-Schranke $M(u, v) = \min(u, v)$.

Wenn mittels der Gumbel-Copula die Abhängigkeit zwischen Zufallsvariablen modelliert wird, ist es mithilfe des Parameters θ möglich, sämtliche positive Abhängigkeiten zwischen Unabhängigkeit ($\theta = 1$) und perfekter Abhängigkeit ($\theta \rightarrow \infty$) abzudecken.

3 Abhängigkeitsmodellierung

Die Gumbel-Copula besitzt eine obere, aber keine untere Tailabhängigkeit. Es gilt $\lambda_U = 2 - 2^{1/\theta}$, $\lambda_L = 0$, denn:

$$C_\theta^{Gu}(u, u) = \exp\{-(\ln u)^\theta + (\ln u)^\theta\} = \exp\{-(2(\ln u)^\theta)^{1/\theta}\} = \exp(2^{1/\theta} \ln u) = u^{2^{1/\theta}}$$

$$\begin{aligned}\lambda_L^{\theta, Gu} &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u^{2^{1/\theta}}}{u} \stackrel{\text{de'l'H}}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{2^{1/\theta} u^{2^{1/\theta}-1}}{1} = 0 \\ \lambda_U^{\theta, Gu} &= \lim_{u \rightarrow 1-} \frac{1 - 2u + C_\theta^{Gu}(u, u)}{1 - u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 1-} \frac{1 - 2u + u^{2^{1/\theta}}}{1 - u} \\ &\stackrel{\text{de'l'H}}{=} \lim_{u \rightarrow 1-} \frac{-2 + 2^{1/\theta} u^{2^{1/\theta}-1}}{-1} = 2 - 2^{1/\theta} \neq 0\end{aligned}$$

Für das Risikomanagement ist die Gumbel-Copula besonders interessant, da sie höhere Abhängigkeiten in den Tails der Verteilungen modelliert, die für die Schadenversicherung wichtig sind. Somit kann man Risiken modellieren, bei denen eine signifikante Abhängigkeit erst bei großen Schäden entsteht.

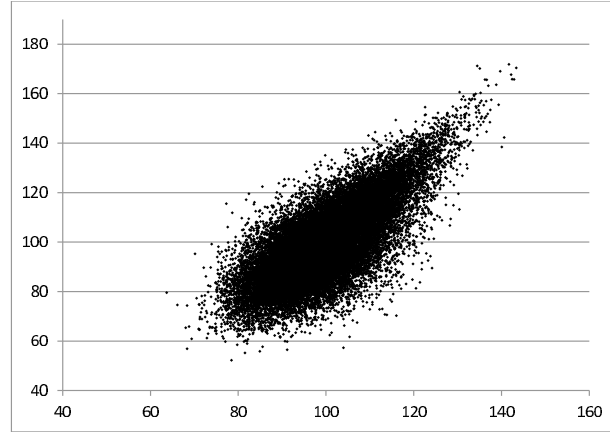


Abbildung 3.3: Simulation der gemeinsamen Verteilung mit der Gumbel-Copula

Für die Gumbel-Copula mit Generator $\varphi_\theta(t) = (-\ln t)^\theta$ mit $\theta \geq 1$ erhält man

$$\frac{\varphi_\theta(t)}{\varphi'_\theta(t)} = \frac{t \ln t}{\theta}.$$

Mit Satz 6. ergibt sich damit für Kendall's τ

$$\tau_\theta = 1 + 4 \int_0^1 \frac{t \ln t}{\theta} dt = 1 + \frac{4}{\theta} \left(\left[\frac{t^2}{2} \ln t \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{2} dt \right) = 1 + \frac{4}{\theta} \left(0 - \frac{1}{4} \right) = 1 - \frac{1}{\theta}.$$

[3] [17] [21] [25]

Clayton-Copula

Definition 9

Sei $\varphi_\theta(t) = (t^{-\theta} - 1)/\theta$ mit $\theta \in [-1, \infty) \setminus \{0\}$, so ist $\varphi(t)$ stetig und $\varphi_\theta(1) = 0$. Für $t \in (0, 1)$ ist φ_θ streng monoton fallend, da

$$\varphi'_\theta(t) = -\frac{t^{-\theta}}{t} \leq 0$$

gilt.

Weiter ist φ_θ konvex, da

$$\varphi''_\theta(t) = \frac{t^{-\theta}\theta}{t^2} + \frac{t^{-\theta}}{t^2}, \text{ für } \theta \in [-1, \infty) \setminus \{0\}$$

gilt.

Damit ist die Clayton-Copula durch

$$C_\theta^{Cl}(u, v) = \max([u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1]^{-1/\theta}, 0)$$

gegeben.

Für $\theta > 0$ haben wir strikte Copulas und die Form vereinfacht sich zu

$$C_\theta^{Cl}(u, v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}.$$

Bei der Clayton-Copula erhalten wir für $\theta = -1$ die untere Fréchet-Hoeffding-Schranke. Für den Grenzwert $\lim_{\theta \rightarrow 0} C_\theta^{Cl}$ erhält man die Unabhängigkeitscopula und für $\lim_{\theta \rightarrow \infty} C_\theta^{Cl}$ erhält man die obere Fréchet-Hoeffding-Schranke.

Die Clayton-Copula besitzt eine untere, aber keine obere Tailabhängigkeit. Es gilt $\lambda_U = 0, \lambda_L = 2^{-1/\theta}$. Dies wird analog zur Gumbel-Copula berechnet.

Für die Clayton-Copula mit Generator $\varphi_\theta(t) = (t^{-\theta} - 1)/\theta$ mit $\theta \in [-1; \infty) \setminus \{0\}$ ergibt sich:

$$\frac{\varphi_\theta(t)}{\varphi'_\theta(t)} = \frac{t^{\theta+1} - t}{\theta}.$$

Mit Satz 6. ergibt sich damit für Kendall's τ

$$\tau_\theta = 1 + 4 \int_0^1 \frac{t^{\theta+1} - t}{\theta} dt = 1 + \frac{4}{\theta} \left(\frac{1}{\theta+2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\theta}{\theta+2}.$$

[19] [21] [25]

3.2.3 Multivariate Archimedische Copulas

Im Folgenden wird die Konstruktion einer multivariaten Erweiterung von archimedischen 2-Copulas erläutert. Für $u = (u_1, \dots, u_n)$ lässt sich die n -dimensionale Produktcopula schreiben als:

$$\prod_{i=1}^n(u_i) = u_1 \cdot \dots \cdot u_n = \exp(-[(-\ln u_1) + \dots + (-\ln u_n)]).$$

Womit folgende Erweiterung der Formel 3.1 nahe liegt:

$$C^n(u) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_n)). \quad (3.5)$$

Diese Copula kann man iterativ aus archimedischen 2-Copulas gewinnen, indem man folgendermaßen vorgeht:

$$C^n(u_1, \dots, u_n) = C(C^{n-1}(u_1, \dots, u_{n-1}), u_n).$$

Im Allgemeinen ist diese Technik jedoch nicht auf Copulas anwendbar, denn mit $\varphi(t) = 1 - t$ als Generator erhält man W^n , welche für $n \geq 3$ keine Copula ist. Da archimedische Copulas assoziativ und symmetrisch sind, ist mit 3.5 unter bestimmten Voraussetzungen an den Generator in der Tat eine Copula definiert.

Lemma 3

Falls die Pseudo-Inverse $\varphi^{[-1]}$ eines archimedischen Generators vollständig monoton ist, so gilt $\varphi^{[-1]}(t) > 0, \forall t \in [0, \infty)$. Das bedeutet φ ist strikt und es gilt $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$.

Der folgende Satz gibt die notwendige und hinreichende Bedingung für einen strikten Generator an, um eine archimedische Funktion zu erzeugen:

Satz 8

Sei $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ eine stetige und streng monoton fallende Funktion mit $\varphi(0) = \infty$ und $\varphi(1) = 0$. Sei weiter φ^{-1} die Inverse von φ . Falls $C^n : I^n \rightarrow I$ definiert ist wie in 3.5, so ist C^n genau dann eine n -Copula für $n \geq 2$, falls φ^{-1} vollständig monoton auf $[0, \infty)$ ist, d.h. es gilt:

$$(-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \varphi^{-1}(t) \geq 0$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und $t > 0$.

Die Inversen solcher Erzeuger können als Laplace-Transformierte nicht-negativer Zufallsvariablen Z dargestellt werden:

$$\varphi^{-1}(t) = E(e^{-tZ}), t \geq 0.$$

Für die Gumbel-Copula besitzt die Zufallsvariable Z eine spezielle positiv-stabile Verteilung mit Laplace-Transformierter:

$$\varphi^{-1}(t) = E(e^{-tZ}) = \exp -t^{1/\theta}, t \geq 0.$$

3 Abhängigkeitsmodellierung

Die zugehörige Verteilung besitzt keine explizite Darstellung der Dichte oder Verteilungsfunktion.

Wenn archimedische Copulas mit der Bedingung von Satz 8 auf n -Dimensionale erweitert werden, liefert das folgende Lemma eine Einschränkung. Es besagt nämlich, dass mit vollständig monotonen Inversen der strikten Generatoren nur positive Abhängigkeiten modelliert werden können.

Lemma 4

Falls die Inverse φ^{-1} eines strikten Generators φ einer archimedischen Copula vollständig monoton ist, dann gilt $C \succ \Pi$.

Beweis siehe [17] S. 122.

[21] [25] [19] [17]

3.3 Rangkorrelation

Bei der Rangkorrelation werden die absoluten Zufallsvariablen vernachlässigt, weil nur noch die Zufallsvariablen auf einer Ordinalskala betrachtet werden. Ein Ausreißer allein könnte den Wert eines Rangkorrelationskoeffizienten kaum beeinflussen, da nicht die Ausprägung an sich betrachtet wird, sondern lediglich die Ordnung der Zufallszahlen. Da Rangkorrelationskoeffizienten nicht die Randverteilungen der jeweiligen Zufallsvariablen berücksichtigen, eignen sie sich sehr gut zur Messung von Abhängigkeiten, die von Copulas dargestellt werden. Zur Auswertung der durch Monte-Carlo-Simulation erzeugten Realisationen wird die empirische Definition eines speziellen Rangkorrelationsmaßes benötigt, auf welches als erstes eingegangen wird. Dazu wird der Begriff der Konkordanz benötigt. Grob formuliert ist ein Paar von Zufallsvariablen konkordant, wenn große Werte der einzelnen Zufallsvariablen mit großen Werten der anderen verbunden sind bzw. kleine Werte der einen mit kleinen Werten der anderen.

Definition 10

Es sei (X, Y) ein reelwertiger Zufallsvariablenvektor mit den Beobachtungen (x_i, y_i) und (x_j, y_j) . Dann gilt:

- (x_i, y_i) und (x_j, y_j) sind genau dann konkordant, wenn gilt:

$$(x_i < x_j \wedge y_i < y_j) \vee (x_i > x_j \wedge y_i > y_j).$$

- (x_i, y_i) und (x_j, y_j) sind genau dann diskordant, wenn gilt:

$$(x_i < x_j \wedge y_i > y_j) \vee (x_i > x_j \wedge y_i < y_j).$$

Definition 11 (Empirisches Kendall's tau)

Sei $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$ eine Realisierung des Zufallsvektors (X, Y) . Dann gibt es $\binom{n}{2}$ verschiedene Paare (x_i, y_i) und (x_j, y_j) in der Beobachtung. Mit c wird die Anzahl konkordanter Paare und mit d die Anzahl diskordanter Paare bezeichnet, so dass das empirische Kendall's tau wie folgt definiert ist:

$$\tau_c = \frac{c - d}{c + d} = \frac{c - d}{\binom{n}{2}} = p_c - p_d,$$

wobei p_c und p_d die Wahrscheinlichkeiten für Konkordanz bzw. Diskordanz sind.

Zur Schätzung des empirischen τ_c wird die folgende Formel eingesetzt:

$$\hat{\tau}_c = \sum_{i < j} \text{sign}[(x_i - x_j) * (y_i - y_j)]$$

wobei sign definiert ist als:

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0, & \text{für } x = 0 \\ -1, & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Definition 12 (Kendall's tau)

Es seien (X, Y) und (\tilde{X}, \tilde{Y}) zwei unabhängige Kopien der gemeinsamen Verteilungsfunktion F . Dann wird Kendall's tau definiert als die Wahrscheinlichkeit der Konkordanz minus der Wahrscheinlichkeit der Diskordanz:

$$\tau(X, Y) = \mathbb{P}\left((X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y}) > 0\right) - \mathbb{P}\left((X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y}) < 0\right).$$

Satz 9 (Kendall's tau mit Copula)

Sei (X, Y) ein Vektor von Zufallsvariablen mit Copula C . Dann ist Kendall's tau gegeben durch:

$$\tau(X, Y) = \tau_C = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dC(u, v) - 1.$$

Beweis siehe [5] S.17

Dieses Integral kann man auch als Erwartungswert der Funktion $C(U, V)$ mit auf I rechteckverteilten Zufallsvariablen auf $[0; 1]$ auffassen. Es gilt:

$$\tau_C = 4E(C(U, V)) - 1.$$

Kendall's tau kann als Maß betrachtet werden, das die Stärke der monotonen Abhängigkeit zwischen X und Y misst.

[4] [5] [15] [21]

3.4 Tail Abhängigkeit

Für das Risikomanagement ist es von großer Bedeutung, die Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Eintreten mehrerer extremer Ereignisse anzugeben.

Anders als bei den bisher vorgestellten Kennzahlen, bei denen das Ziel war, die gesamte Abhängigkeit zwischen zwei Zufallsvariablen X und Y auszudrücken, geht es im Rahmen der Tailabhängigkeit darum, Kennzahlen für die Abhängigkeit von extremen Ereignissen zu bestimmen.

Es geht also um die Frage, wie die Abhängigkeitsstruktur in den Randbereichen einer Verteilung in Form einer geeigneten Kennzahl formuliert werden kann.

Definition Tail Abhängigkeit

Seien im Folgenden zwei Zufallsvariablen X und Y sowie deren stetige Randverteilungen F_1 und F_2 gegeben. Man interessiert sich für die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(X \leq a | Y \leq b)$, dass Risiko X höchstens zu einem Verlust von a führt, unter der Bedingung, dass Risiko Y höchstens einen Verlust von b erleidet. Nach der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit ist:

$$P(X \leq a | Y \leq b) = \frac{P(X \leq a, Y \leq b)}{P(Y \leq b)}.$$

3 Abhängigkeitsmodellierung

Bei bekannter Copula C von X und Y ist es nach dem Satz von Sklar möglich, eine gemeinsame Verteilungsfunktion F zu finden, die F_1 und F_2 als Randverteilungen besitzt:

$$P(X \leq a | Y \leq b) = \frac{C(F_1(a), F_2(b))}{F_2(b)}.$$

O.B.d.A. treten die Ereignisse $X \leq a$ bzw. $Y \leq b$ mit derselben Wahrscheinlichkeit α ein, d.h.:

$$\alpha = P(X \leq a) = F_1(a) \text{ und } \alpha = P(Y \leq b) = F_2(b).$$

Aufgrund der Stetigkeit der Randverteilungen folgt damit:

$$a = F_1^{-1}(\alpha) \text{ und } b = F_2^{-1}(\alpha).$$

Es gilt also:

$$\begin{aligned} P(X \leq a | Y \leq b) &= \frac{C(F_1(F_1^{-1}(\alpha)), F_2(F_2^{-1}(\alpha)))}{F_2(F_2^{-1}(\alpha))} \\ &= \frac{C(\alpha, \alpha)}{\alpha}. \end{aligned}$$

Wird nun der Grenzwert für $\alpha \rightarrow 0$ gebildet (falls dieser existiert), so ergibt sich der untere Tail-Abhängigkeitskoeffizient als Grenzwert.

Definition 13

Seien X und Y zwei stetige Zufallsvariablen mit bekannter Copula. Somit ergibt sich der untere Tailabhängigkeitskoeffizient als:

$$\lambda_L = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{C(\alpha, \alpha)}{\alpha}$$

falls der Grenzwert existiert. Dann heißen X und Y

- asymptotisch abhängig im unteren Rand, wenn $\lambda_L \in (0, 1]$,
- asymptotisch unabhängig im unteren Rand, wenn $\lambda_L = 0$.

Nun können mit Hilfe des unteren Tail-Abhängigkeitskoeffizienten Aussagen über die Wahrscheinlichkeit gemacht werden, dass das Risiko X höchstens zu einem Verlust von a führt, unter der Bedingung, dass das Risiko Y höchstens einen Verlust von b erleidet.

Will man dagegen Aussagen über die Wahrscheinlichkeit erhalten, dass das Risiko X einen sehr hohen Verlust erleidet ($X > a$) unter der Bedingung, dass auch Risiko Y einen hohen Verlust verursacht hat ($Y > b$), so wird der obere Tail-Abhängigkeitskoeffizient benötigt. Dieser kann ähnlich hergeleitet werden.

3 Abhängigkeitsmodellierung

Seien zwei Zufallsvariablen X und Y gegeben. Dann gilt:

$$\begin{aligned} P(X > a, Y > b) &= P(X > a) - P(X > a, Y \leq b) \\ &= P(Y > b) - P(X \leq a, Y > b) \\ &= 1 - P(X < a) - P(Y < b) + P(X \leq a, Y \leq b). \end{aligned}$$

Nach der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit ist

$$\begin{aligned} P(X > a | Y > b) &= \frac{P(X > a, Y > b)}{P(Y > b)} \\ &= \frac{1 - P(X \leq a) - P(Y \leq b) + P(X \leq a, Y \leq b)}{1 - P(Y \leq b)}. \end{aligned}$$

Äquivalent zur vorigen Ausführung ist dann wieder:

$$\alpha = P(X \leq a) = F_1(a) \text{ und } \alpha = P(Y \leq b) = F_2(b)$$

und aufgrund der Stetigkeit der Randverteilungen somit:

$$a = F_1^{-1}(\alpha) \text{ und } b = F_2^{-1}(\alpha).$$

Es gilt also:

$$\begin{aligned} P(X > a | Y > b) &= \frac{1 - F_1(F_1^{-1}(\alpha)) - F_2(F_2^{-1}(\alpha)) + C(F_1(F_1^{-1}(\alpha)), F_2(F_2^{-1}(\alpha)))}{1 - F_2(F_2^{-1}(\alpha))} \\ &= \frac{1 - 2\alpha + C(\alpha, \alpha)}{1 - \alpha}. \end{aligned}$$

Wird der Grenzwert für $\alpha \rightarrow 1$ gebildet (falls dieser existiert), so ergibt sich der obere Tail-Abhängigkeitskoeffizient als Grenzwert.

Definition 14

Seien X und Y zwei stetige Zufallsvariablen mit bekannter Copula. Somit ergibt sich der obere Tailabhängigkeitskoeffizient als:

$$\lambda_U = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{1 - 2\alpha + C(\alpha, \alpha)}{1 - \alpha}$$

falls der Grenzwert existiert. Dann heißen X und Y

- asymptotisch abhängig im oberen Rand, wenn $\lambda_U \in (0, 1]$,
- asymptotisch unabhängig im oberen Rand, wenn $\lambda_U = 0$.

3 Abhängigkeitsmodellierung

Bemerkung 3:

- *Je größer λ_L (bzw. λ_U) ist, desto größer ist die Abhängigkeit im unteren (bzw. oberen) Tail.*
- *Tail Abhängigkeit hängt nicht von der Randverteilung, sondern ausschließlich von der Copula ab. Daher überträgt sich die Invarianz unter streng monoton steigenden Transformationen, genau wie bei der Rangkorrelation, von der Copula auf die Tail Abhängigkeit.*
- *„Die Abhängigkeiten in den Tails werden durch verschiedene Copulas in unterschiedlicher Art und Weise modelliert. So existieren beispielsweise Copulas, welche Abhängigkeit im unteren Tail besitzen und solche, die im unteren Tail asymptotische Unabhängigkeit modellieren. Bei der Wahl eines geeigneten Copula-Modells ist das Tail-Verhalten der entsprechenden Copula ein entscheidender Auswahlfaktor, insbesondere dann, wenn die Wahrscheinlichkeit für gemeinsam auftretende extreme Ereignisse relativ groß ist.“[9]*

[3] [9] [16]

4 Berechnung des Value at Risk

4.1 Einfache Berechnung des Value at Risk

Jede Normalverteilung lässt sich in eine Standardnormalverteilung mit dem Erwartungswert 0 und der Standardabweichung 1 transformieren. Einer Standardabweichung von 1 oder einem Vielfachen davon kann im Falle einer Standardnormalverteilung eine bestimmte Eintrittswahrscheinlichkeit zugeordnet werden. Damit lässt sich die Berechnung der Standardabweichung für alternative Konfidenzniveaus erheblich vereinfachen. Die Standardabweichung von 1 steht für ein Konfidenzniveau von 84,14%. Soll ein anderes Konfidenzniveau zugrunde gelegt werden, muss die Standardabweichung von 1 lediglich mit einem der gewünschten Aussagesicherheit entsprechenden z-Wert (Quantil-Wert) der Standardnormalverteilung multipliziert werden. Somit kann der VaR analytisch berechnet werden. Das Produkt aus dem Erwartungswert und der Standardabweichung ergibt die Erwartungswertstandardabweichung. Der VaR verhält sich proportional zu dieser Standardabweichung. Die Proportionalitätskonstante kann durch den z-Wert der Standardnormalverteilung beschrieben werden. Daher ergibt die anschließende Multiplikation der Erwartungswertabweichung mit dem z-Wert der Standardnormalverteilung den undiversifizierten VaR für die gewünschte Aussagesicherheit, welche mit folgender Formel ausgedrückt wird:

$$VaR = Erwartungswert \cdot \sigma \cdot z,$$

wobei

σ = Standardabweichung des Risikofaktors

z = Quantil-Wert der Standardnormalverteilung zum gewünschten Konfidenzniveau ist.

[26] [31]

4.2 Varianz-Kovarianz-Ansatz

Ausgangspunkt bei dem Varianz-Kovarianz-Ansatz ist die Annahme, dass die Schwankungen aller Risikofaktoren einer Normalverteilung folgen und ein linearer Zusammenhang zwischen ihnen besteht.

Die Formel zur Berechnung der Gesamtstandardabweichung berücksichtigt durch Einbeziehung des Korrelationskoeffizienten die Diversifikationseffekte zwischen den einzelnen Risikofaktoren.

4 Berechnung des Value at Risk

Gesamtstandardabweichung:

$$\sigma_P = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sigma_i^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j<i}^n x_i \cdot x_j \cdot cov_{ij}} \quad (4.1)$$

$$cov_{ij} = \sigma_i \cdot \sigma_j \cdot k_{ij}.$$

Gesamtstandardabweichung für zwei Risikofaktoren:

$$\sigma_P = \sqrt{x_1^2 \cdot \sigma_1^2 + x_2^2 \cdot \sigma_2^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot k_{1,2}}.$$

Unter dem Anteil x_i ist im Sinne der VaR-Berechnung der Erwartungswert zu verstehen. Die Varianzen der Risikofaktoren werden mit σ_i^2 bezeichnet und k_{ij} steht für die Korrelation zwischen den Risikofaktoren.

Risikodiversifikationseffekte können realisiert werden, wenn der Korrelationskoeffizient zweier Risikofaktoren kleiner 1 ist.

Für die Berechnung der Gesamtstandardabweichung mit mehr als zwei Risikofaktoren wird die Formel in Matrixschreibweise überführt.

$$\sigma_P = \sqrt{[x_1, x_2, \dots, x_n] \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & cov_{1,2} & \dots & cov_{1,n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ cov_{1,2} & cov_{n,2} & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}} \quad (4.2)$$

Der Gesamt-Value at Risk entsteht durch Multiplikation der Gesamtstandardabweichung mit dem Quantil-Wert der Standardnormalverteilung zum gewünschten Konfidenzniveau.

$$Value \ at \ Risk = \sigma_P \cdot z \quad (4.3)$$

[31] [23]

4.3 Monte Carlo Simulation

Als Monte-Carlo Simulation bezeichnet man eine Klasse mathematischer Methoden, bei der mit Hilfe von Zufallsexperimenten mathematische Problemstellungen approximativ gelöst werden.

„Die Grundidee ist, dass man auf dem Computer Ereignisse als Zufallszahlen schnell und in großer Zahl simulieren kann, um daraus Schlüsse für das zu untersuchende System zu ziehen. Im einfachsten Fall erzeugt man aus der Menge aller möglichen Ereignisse eines Systems eine „zufällige“ Stichprobe und verwendet die relative Häufigkeit als Schätzer für die Eintrittswahrscheinlichkeit. Dabei sichert der das Gesetz der großen Zahlen, dass die relative Häufigkeit mit steigender Anzahl von Simulationen gegen die Eintrittswahrscheinlichkeit konvergiert.“[33]

4 Berechnung des Value at Risk

Dabei treten jedoch Schätzfehler auf, die durch Erhöhung des Stichprobenumfangs reduziert werden können. Die Monte-Carlo-Methode besitzt eine relativ langsame Konvergenz. Ausführlicher wird das Thema in [33] behandelt.

Die Monte-Carlo-Methode kann zur Berechnung des Value at Risk verwendet werden. Das Vorgehen wird hierbei in vier Schritten erläutert.

Um korrelierte Zufallszahlen zu simulieren, erzeugt man als Erstes einen Vektor von standardnormalverteilten Zufallszahlen. Im zweiten Schritt bringt man die Zufallszahlen in die gewünschte Verteilung um anschließend im dritten Schritt mit der Cholesky-Zerlegung die unkorrelierten Zufallszahlen in korrelierte Zufallszahlen zu transformieren. Im letzten Schritt wird der Value at Risk berechnet.

1. Schritt: Erzeugung von gleichverteilten Zufallszahlen.

Zufallszahlen kann man mit verschiedenen Methoden erzeugen. In der Praxis werden Zufallszahlen mit Hilfe des Computers generiert, welche mit bestimmten Funktionen bzw. Algorithmen erzeugt werden. Daher nennt man diese Zufallszahlen auch Pseudozufallszahlen. Wenn man bei diesen Funktionen immer den gleichen Startwert einsetzt, dann erhält man auch immer die gleichen Zufallszahlen. Dies ist wichtig für die Reproduktion von Zufallsexperimenten.

Zufallszahlen kann man zum Beispiel mit linearen Kongruenzgeneratoren erzeugen.

Definition 15

Ein linearer Kongruenzgenerator der Ordnung $k \geq 1$ mit dem Modulus $m \in \mathbb{N}$ besteht aus folgendem Rekursionsschema:

$$x_{n+1} := \left(\sum_{i=0}^{k-1} a_i x_{n-i} + c \right) \mod m$$

für $n \geq k-1$, mit den Startwerten $x_0, \dots, x_{k-1} \in \mathbb{N}_0$. Dabei heißt $c \in \mathbb{N}_0$ die additive Konstante und $a_0, \dots, a_{k-1} \in \mathbb{N}_0$ sind die Multiplikatoren.

Der wichtigste Fall ist $k = 1$, dann gilt:

$$x_{n+1} = (ax_n + c) \mod m.$$

Als Alternative können inverse Kongruenzgeneratoren benutzt werden. Diese erzeugen Folgen $(x_n), n \geq 0$ ganzer Zahlen nach dem folgenden Schema:

$$x_{n+1} = (a\bar{x}_n + c) \mod m,$$

dabei bezeichnet \bar{x} das zu x inverse Element bezüglich der Multiplikation modulo m , d.h. dasjenige Element \bar{x} aus $\mathbb{Z}_m = \{0, \dots, m-1\}$, für das gilt:

$$(x\bar{x}) \mod m = 1.$$

[14]

2. Schritt: Die gleichverteilten Zufallszahlen in die gewünschte Verteilung bringen.

Die Inversionsmethode ist ein Verfahren, um aus gleichverteilten Zufallszahlen andere Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu erzeugen.

Definition 16

Sei $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ eine Verteilungsfunktion. Für $p \in (0, 1)$ heißt

$$x_p := \inf\{x | F(x) \geq p\}$$

das p -Quantil von F bzw. der Wahrscheinlichkeitsverteilung, die zur Verteilungsfunktion F gehört.

Die Funktion $F^{-1} : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F^{-1}(p) := \inf\{x | F(x) \geq p\}$$

heißt Quantilfunktion oder verallgemeinerte Inverse von F .

Der folgende Satz ist die Grundlage der Inversionsmethode zur Simulation von Zufallszahlen.

Satz 10

Sei $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ eine Verteilungsfunktion mit Quantilfunktion F^{-1} .

- Sei $Y \sim U(0, 1)$, $Z := F^{-1}(Y)$. Dann ist $Z \sim F$, d.h. die Verteilungsfunktion von Z ist F .
- Sei $X \sim F$, $Z := F(X)$. Wenn F streng monoton steigend und stetig ist, dann ist $Z \sim U(0, 1)$.

Für die Inversionsmethode benötigen wir den ersten Teil des Satzes 10. Wenn $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ eine Verteilungsfunktion mit Quantilfunktion F^{-1} und $Y \sim U(0, 1)$ eine gleichverteilte Zufallsvariable ist, wird $X := F^{-1}(Y)$ gesetzt. Somit ist $X \sim F$, d. h. die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X ist tatsächlich F .

Wir betrachten ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= P(F^{-1}(Y) \leq x) && \text{(nach Definition von } Y) \\ &= P(Y \leq F(x)) && \text{(denn } F^{-1}(Y) \leq x \Leftrightarrow Y \leq F(x)) \\ &= F(x), \end{aligned}$$

4 Berechnung des Value at Risk

denn Y ist nach Voraussetzung gleichverteilt. Dies bedeutet, dass die Beziehung $P(Y \leq t) = t$ für beliebiges $t \in [0, 1]$ (und damit auch für $t = F(x)$) gilt.

Für die Praxis hat dieses Ergebnis folgende Bedeutung: Es kann eine Realisierung x erzeugt werden, wenn die inverse Verteilungsfunktion bzw. Quantilfunktion F^{-1} bekannt ist. Dafür wird zunächst eine Realisierung y der Gleichverteilung simuliert. Anschließend wird dieser Wert in die inverse Verteilungsfunktion eingesetzt, d.h. $x := F^{-1}(y)$. Der Simulationssatz besagt nun, dass x tatsächlich eine Simulation der vorgegebenen Verteilung ist.

Mit der Inversionsmethode lässt sich zum Beispiel die Weibullverteilung einfach generieren.

$$\text{Weibull-Verteilung } W(\alpha) : X = \{-\ln(U)\}^{1/\alpha} \quad \text{für } \alpha > 0$$

Beachte: Mit U ist auch $1 - U$ stetig gleichverteilt über $[0, 1]$

[1] [3]

3. Schritt: Mit unabhängigen in abhängige Zufallszahlen überführt.

Eine Variante unabhängigen in abhängige Zufallszahlen zu überführen ist zum Beispiel mit Hilfe der Cholesky-Zerlegung möglich. Dabei wird eine Kovarianzmatrix mit der Cholesky-Zerlegung in eine Dreiecksmatrix zerlegt und die Zeilenvektoren der Zufallszahlen werden mit der Cholesky-Matrix multipliziert. Das daraus resultierende Ergebnis sind Zufallszahlen, die entsprechend der Kovarianzmatrix korreliert sind.

Definition 17

Eine Matrix $\mathbb{A}^{(n \times n)}$ ist positiv definit, wenn \mathbb{A} regulär ist und $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{x} \neq 0$

$$\vec{x}^T \mathbb{A} \vec{x} > 0.$$

\mathbb{A} ist symmetrisch, d.h. $\mathbb{A} = \mathbb{A}^T$

Satz 11

Jede symmetrisch positiv definite Matrix $\mathbb{A} = (n \times n)$ ist in der Form $A = L * L^T$ mit der unteren Δ -Matrix

$$L = \begin{pmatrix} l_{1,1} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ l_{1,n} & \dots & l_{n,n} \end{pmatrix}$$

darstellbar.

Ohne Beweis.

4 Berechnung des Value at Risk

Man erhält für die Elemente von A im Allgemeinen:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^j l_{ik} l_{jk}, i \geq j$$

wobei

$$l_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{für } i < j \\ \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2}, & \text{für } i = j \\ \frac{1}{l_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} l_{jk} \right), & \text{für } i > j. \end{cases}$$

[29]

4. Schritt: Berechnung des Value at Risk.

In diesem Schritt werden die abhängigen Zufallszahlen in aufsteigender Reihenfolge sortiert und anhand des $1 - \alpha$ Quantils der Wert abgelesen.

4.4 Copula Ansatz

Wie schon in Kapitel 3.2.3 geschrieben, sind archimedische Copulas damit charakterisiert, dass die Inverse φ^{-1} des Generators φ der Copula die Laplace-Transformierte $\hat{G}(t)$ einer Verteilungsfunktion G ist, d.h. es ist

$$\hat{G}(t) = \int_0^\infty e^{-tx} dG(x), t \geq 0.$$

Die Erzeugung von Zufallsvektoren U mit der gewünschten Copula erfolgt dann in drei Schritten:

- Erzeuge eine Zufallszahl V mit der Verteilungsfunktion G .
- Erzeuge (auch von V) unabhängige Zufallszahlen W_1, \dots, W_n .
- Setze

$$U := \left(\frac{\hat{G}(-\ln(W_1))}{V}, \dots, \frac{\hat{G}(-\ln(W_n))}{V} \right).$$

Für die Gumbel-Copula wird eine positive Stabilverteilung $V \sim St(1/\theta, 1, \gamma, 0)$ generiert, wobei $\gamma = (\cos(\pi/(2\theta)))^\theta$ und $\theta > 1$. Die dazugehörige Laplace-Transformierte ist:

$$\varphi^{-1}(t) = \exp -t^{1/\theta}, t \geq 0.$$

4 Berechnung des Value at Risk

Für mehr Details zur Generierung von positiven Stabilverteilungen siehe [19] Anhang A.2.9.

[19] [3]

5 Praktische Umsetzung

6 Das Standardmodell

6.1 Beschreibung des Standardmodells

Das Standardmodell ist ein, von Solvency II angebotenes, vorgegebenes Modell, um die komplexen Anforderungen aus Solvency II an die Risikomessung auf ein planbares Maß zu begrenzen. In wesentlichen Teilen ist das Standardmodell von der Aufsicht vordefiniert. Dabei werden verschiedene vereinfachende Annahmen gemacht. Als bekannt werden die Form der Verteilungen der Risikofaktoren und die der Einzelrisiken vorausgesetzt. Ebenfalls in der Parametrisierung sind die Abhängigkeiten der Einzelrisiken vorgegeben. Auch der Mechanismus zur Bestimmung des Risikokapitals der Einzelrisiken ist vorgegeben und der Value at Risk zum Risikoniveau $\alpha = 0,5\%$ ist damit fixiert.

In diesem Kapitel wird nur ein kleiner Teil des Standardmodells betrachtet und zwar der Teil für die Berechnung des SCR für das Nicht-Leben Prämienrisiko.

Das SCR für das Risiko X zum Risikoniveau α ist die Differenz

$$SCR_{\alpha}(X) = VaR_{\alpha}(X) - \mu, \quad (6.1)$$

wobei μ im Wesentlichen den jährlichen Prämieinnahmen entspricht.

Die Berechnungsvorschriften für das Prämienrisiko wurden den technischen Daten zur fünften quantitativen Auswirkungsstudie unter Solvency II (QIS5 -the Fifth Quantitative Impact Study- Technical Specifications [6]) entnommen. Sie enthalten die Voraussetzungen, die an das Standardmodell gestellt werden, sowie Berechnungsformeln und Vereinfachungen zur Berechnung des SCR's. Im Standardmodell wird von lognormalverteilten Risiken ausgegangen. Die Überlegung, die dahinter steckt, ist die, dass die gegebenen Daten oft zwar eingipflig, aber stark asymmetrisch verteilt sind. Dies verhindert die Annahme der Normalverteilung. Wenn man auf positive, rechtsschief verteilte Daten die natürliche Logarithmusfunktion anwendet, lassen die transformierten Werte die Annahme der Normalverteilung zu. Die Eigenschaften der Lognormalverteilung lassen sich durch den einfachen Transformationszusammenhang auf die Eigenschaften der Normalverteilung zurückführen.

Bei der Berechnung des SCR für die Sparte Nicht-Leben Prämienrisiko sind in den Technical Specifications drei verschiedene Stellen aufgeführt, bei denen Diversifikation möglich ist. Diese sind die geographische Diversifikation, die Diversifikation zwischen dem Reserve- und Prämienrisiko sowie die Diversifikation zwischen den einzelnen Sparten des Prämienrisikos.

Für die vorliegende Arbeit wurden folgende vereinfachende Annahmen getroffen:

6 Das Standardmodell

- es wird nur die Diversifikation zwischen den einzelnen Sparten des Prämienrisikos betrachtet,
- das Unternehmen tätigt seine Geschäfte nur im Inland,
- das Reserverisiko wird auf Null gesetzt.

Da nur die Berechnung des SCR für das Prämienrisiko erfolgt, wurden die in den QIS5 vorgegebenen Formeln vereinfacht und angepasst.

Voraussetzungen

Die Versicherungsunternehmen müssen ihr Nicht-Leben-Geschäft in folgende Sparten (lob=line of business) segmentieren:

Nr	Sparte
1	Kraftfahrzeug Haftpflicht
2	Sonstige Kraftfahrt
3	Transport, See-und Luftfahrt
4	Feuer, Sach
5	Haftpflicht
6	Kredit, Kaution
7	Rechtsschutz
8	Beistandsleistung
9	Sonstige (ohne Kranken, Leben)
10	akt. NP-Rückversicherung-Sach
11	akt. NP-Rückversicherung-Unfall
12	akt. NP-Rückversicherung-Transport, See-und Luftfahrt

Tabelle 6.1: Spartensegmentierung

Berechnung des VaR für das Prämienrisiko

Um die Berechnung durchführen zu können, braucht das Unternehmen **Daten**, welche wie folgt bezeichnet werden:

$P_{lob}^{t,written}$ = erwartete gezeichnete Nettoprämie im nächsten Jahr

$P_{lob}^{t,earned}$ = erwartete verdiente Nettoprämie im nächsten Jahr

$P_{lob}^{t-1,written}$ = gezeichnete Nettoprämie des vergangenen Jahres

Die Berechnung des SCR's für das Prämienrisiko ergibt sich aus der Multiplikation eines Risikoträgers mit einem Risikofaktor und erfolgt in mehreren Schritten.

Schritt 1: Bestimmung der Standardabweichung und des Volumenmaßes pro Sparte

Für jede Sparte des Prämienrisikos werden folgende Bezeichnungen für die Standardabweichung und das Volumenmaß verwendet:

$V_{(lob)}$ = das Volumenmaß für das Prämienrisiko

$\sigma_{(lob)}$ = die Standardabweichung für das Prämienrisiko

Das Volumenmaß für das Prämienrisiko der einzelnen Sparten wird folgendermaßen bestimmt:

$$V_{(lob)} = \max \left(P_{lob}^{t,written}; P_{lob}^{t,earned}; P_{lob}^{t-1,written} \right). \quad (6.2)$$

Das Volumenmaß für das Prämienrisiko ist der höchste von drei möglichen Netto-Prämienwerten, ergänzt um den Barwert zukünftiger Vermögenszuwächse aus Verträgen, deren Haftungszeitraum über das nächste Jahr hinaus reicht.

Wenn der Versicherer der Aufsicht glaubwürdig vermittelt, dass er seine erwarteten Netto-Prämieneinnahmen des nächsten Jahres sehr gewissenhaft schätzt und auf keinen Fall unterschätzt, kann er das Volumenmaß folgendermaßen bestimmen:

$$V_{(lob)} = \max \left(P_{lob}^{t,written}; P_{lob}^{t,earned} \right). \quad (6.3)$$

6 Das Standardmodell

Für das Prämienrisiko sind folgende Netto-Markt-Standardabweichungen je Sparte vorgegeben:

Sparte	Standardabweichung für Prämienrisiko
Kraftfahrzeug Haftpflicht	10%
Sonstige Kraftfahrt	7%
Transport, See-und Luftfahrt	17%
Feuer, Sach	10%
Haftpflicht	15%
Kredit, Kautiön	21,5%
Rechtsschutz	6,5%
Beistandsleistung	5%
Sonstige (ohne Kranken, Leben)	13%
akt. NP-Rückversicherung-Sach	17,5%
akt. NP-Rückversicherung-Unfall	17%
akt. NP-Rückversicherung-Transport, See-und Luftfahrt	16%

Tabelle 6.2: Netto-Markt-Standardabweichungen

Schritt 2: Berechnung der gemeinsamen Standardabweichung

In diesem Schritt wird die gemeinsame Standardabweichung der Verlustverteilung für das Prämienrisiko für **alle** Sparten berechnet. Dabei wird für die Aggregation der Standardabweichungen ein Varianz-Kovarianz-Ansatz mit einer vorab definierten Korrelationsmatrix verwendet. (Beim Varianz-Kovarianz-Ansatz wird von einer multivariaten Normalverteilung ausgegangen, welche aber hier nicht gegeben ist.)

Die gemeinsame Standardabweichung $\tilde{\sigma}$ ist wie folgt definiert:

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{V^2} \cdot \sum_{i=1}^{12} \sum_{j=1}^{12} \rho_{i,j} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j \cdot V_i \cdot V_j} \quad (6.4)$$

wobei

σ_i die Bezeichnung der Standardabweichung für die Sparte i und V_i die Bezeichnung für das Volumenmaß für die Sparte i ist. Die Variable V ist in den QIS5 Technical Specifications nicht explizit erläutert, soll aber sicher das Volumenmaß aller Sparten ($\sum_{i=1}^{12} V_i$)

6 Das Standardmodell

angeben.

$\rho_{i,j}$ stellt die Korrelation der Verluste der zwölf Sparten dar, welche wie folgt gegeben sind:

Sparte	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1 KFZ Haftpflicht	1	0.5	0.5	0.25	0.5	0.25	0.5	0.25	0.5	0.25	0.25	0.25
2 Sonstige KFZ	0.5	1	0.25	0.25	0.25	0.25	0.5	0.5	0.5	0.25	0.25	0.25
3 TSL	0.5	0.25	1	0.25	0.25	0.25	0.25	0.5	0.5	0.25	0.25	0.5
4 Feuer,Sach	0.25	0.25	0.25	1	0.25	0.25	0.25	0.5	0.5	0.5	0.25	0.5
5 Haftpflicht	0.5	0.25	0.25	0.25	1	0.5	0.5	0.25	0.5	0.25	0.5	0.25
6 Kredit,Kaution	0.25	0.25	0.25	0.25	0.5	1	0.5	0.25	0.5	0.25	0.5	0.25
7 Rechtsschutz	0.5	0.5	0.25	0.25	0.5	0.5	1	0.25	0.5	0.25	0.5	0.25
8 Beistandsleist.	0.25	0.5	0.5	0.5	0.25	0.25	0.25	1	0.5	0.5	0.25	0.25
9 Sonstige	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	1	0.25	0.25	0.5
10 NP-R-Sach	0.25	0.25	0.25	0.5	0.25	0.25	0.25	0.5	0.25	1	0.25	0.25
11 NP-R-Unfall	0.25	0.25	0.25	0.25	0.5	0.5	0.5	0.25	0.25	0.25	1	0.25
12 NP-R-TSL	0.25	0.25	0.5	0.5	0.25	0.25	0.25	0.25	0.5	0.25	0.25	1

Tabelle 6.3: Werte der Korrelation der Verluste der zwölf Sparten

Schritt 3: Ermittlung der Kapitalanforderung für das Prämienrisiko

Der Kapitalbedarf für das Prämienrisiko wird mit SCR_p bezeichnet. Dieser wird folgendermaßen bestimmt:

$$SCR_p = \rho(\tilde{\sigma}) \cdot V \quad (6.5)$$

wobei V das Volumenmaß (Risikoträger) ist.

Die Funktion (Risikofaktor) $\rho(\tilde{\sigma})$ ist dabei definiert als:

$$\rho(\tilde{\sigma}) = \frac{\exp\left(N_{0.995} \cdot \sqrt{\log(\tilde{\sigma}^2 + 1)}\right)}{\sqrt{\tilde{\sigma}^2 + 1}} - 1 \quad (6.6)$$

wobei $N_{0.995}$ dabei dem 99.5%-Quantil der Standardnormalverteilung entspricht und $\tilde{\sigma}$ die gemeinsame Standardabweichung ist.

Die Herleitung der Formel ist im Anhang 9 zu finden.

[16] [2] [28] [6]

6.2 Umsetzung des Standardmodells

Die Berechnung des SCR's für das Prämienrisiko wurde, unter Einhaltung der Berechnungsvorschriften für das Standardmodell, in Excel ausgeführt, wobei einige Vereinfachungen vorgenommen wurden, die im vorangegangenen Kapitel schon Erwähnung gefunden haben.

Des Weiteren wurde festgelegt, dass das Unternehmen nur drei Sparten besitzt. Für die Berechnung wurden drei Sparten mit unterschiedlichen Standardabweichungen gewählt, und zwar die Sparte KFZ-Haftpflicht, die Sparte Haftpflicht und die Sparte Kredit und Kautions.

Es wird vorausgesetzt, dass der Versicherer die erwarteten Netto-Prämieneinnahmen des nächsten Jahres gewissenhaft schätzt. Außerdem wird vorausgesetzt, dass keine Versicherungsverträge vorhanden sind, deren Haftungszeiten über das nächste Jahr hinaus reichen. Somit kann man die Prämienrückstellung P_{lob}^{PP} mit Null ansetzen und es werden nur die Daten der erwarteten gezeichneten $P_{lob}^{t,written}$ und erwarteten verdienten $P_{lob}^{t,earned}$ Nettoprämien im nächsten Jahr zur Berechnung gebraucht (Erklärung siehe Anhang 9). Diese sind in der folgenden Tabelle abgebildet (Die Werte der Prämieinnahmen sind fiktiv.).

Eingabe Nicht-Leben Prämienrisiko		
Prämien im nächsten Jahr		
	erwartete gez. Nettoprämie	erwartete verdien. Nettoprämie
Kraftfahrzeug Haftpflicht	125	120
Haftpflicht	100	103
Kredit & Kautions	50	56

(a) Werte in Mio. Euro

Tabelle 6.4: Prämieinnahmen des Unternehmens

Das Volumenmaß für das Prämienrisiko wird mit der Formel:

$$V_{(lob)} = \max \left(P_{lob}^{t,written}; P_{lob}^{t,earned} \right)$$

berechnet. Somit beträgt das Volumenmaß für die Sparte KFZ-Haftpflicht 125 Mio., für die Sparte Haftpflicht 103 Mio. und für die Sparte Kredit und Kautions 56 Mio. Euro.

Die Standardabweichungen für die Sparten des Prämienrisikos sind in der Tabelle 6.2 vorgegeben. Somit beträgt die Standardabweichung für die Sparte KFZ-Haftpflicht 10%, für die Sparte Haftpflicht 15% und für die Sparte Kredit und Kautions 21,5%.

Das gemeinsame Volumenmaß V ergibt sich aus der Addition der einzelnen Volumina der gegebenen Sparten, d.h.

$$125 + 103 + 56 = 284.$$

6 Das Standardmodell

Die gemeinsame Standardabweichung $\tilde{\sigma}$ wird mit der Formel:

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{V^2} \cdot \sum_{i=1}^{12} \sum_{j=1}^{12} \rho_{i,j} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j \cdot V_i \cdot V_j}$$

berechnet. Dabei wird für die Aggregation der Standardabweichungen der Varianz-Kovarianz-Ansatz genutzt welcher in Kapitel 4.2 beschrieben wird. Das heißt, in diesem Fall wird mit folgenden zusammengefassten Werten gerechnet:

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{284^2} \cdot (12,5^2 + 15,5^2 + 12^2 + 2 \cdot 0,5 \cdot 12,5 \cdot 15,5 + 2 \cdot 0,25 \cdot 12,5 \cdot 12 + 2 \cdot 0,5 \cdot 15,5 \cdot 12)}$$

Daraus ergibt sich:

$$\tilde{\sigma} = 0,11103.$$

Der Wert der gemeinsamen Standardabweichung $\tilde{\sigma}$ wird im nächsten Schritt in die Formel:

$$\rho(\tilde{\sigma}) = \frac{\exp\left(N_{0.995} \cdot \sqrt{\log(\tilde{\sigma}^2 + 1)}\right)}{\sqrt{\tilde{\sigma}^2 + 1}} - 1$$

eingesetzt, um den Risikofaktor $\rho(\tilde{\sigma})$ ausrechnen zu können.

Das sieht dann wie folgt aus:

$$\rho(\tilde{\sigma}) = \frac{\exp\left(2,5758 \cdot \sqrt{\log(0,11103^2 + 1)}\right)}{\sqrt{0,11103^2 + 1}} - 1.$$

Daraus ergibt sich:

$$\rho(\tilde{\sigma}) = 0,32241.$$

Dieser Wert muss noch mit dem gemeinsame Volumenmaß V multipliziert werden, um den Kapitalbedarf für das Prämienrisiko zu berechnen, d.h.

$$SCR_p = 91,56$$

Somit beträgt der Kapitalbedarf für das Prämienrisiko 91,56 Mio. Euro.

Die Berechnung des Einzelrisikokapitals für die einzelnen Sparten ist zwar nicht in den QIS5 Technical Specifications beschrieben, kann aber ganz einfach umgesetzt werden, indem man in die Formel:

$$\rho(\tilde{\sigma}) = \frac{\exp\left(N_{0.995} \cdot \sqrt{\log(\tilde{\sigma}^2 + 1)}\right)}{\sqrt{\tilde{\sigma}^2 + 1}} - 1$$

den Wert der Standardabweichung der jeweiligen Sparte einträgt und das Ergebnis mit dem jeweiligen Volumenmaß der Sparte multipliziert. Für die Sparte KFZ Haftpflicht sieht dies folgendermaßen aus:

$$\rho(\tilde{\sigma}) = \frac{\exp\left(2,5758 \cdot \sqrt{\log(0,1^2 + 1)}\right)}{\sqrt{0,1^2 + 1}} - 1$$

6 Das Standardmodell

d.h.

$$\rho(\tilde{\sigma}) = 0,28655.$$

$$SCR_p = 35,82.$$

Und somit beträgt für die Sparte KFZ Haftpflicht das Einzelrisikokapital 35,82 Mio. Euro, für die Sparte Haftpflicht 46,42 Mio. Euro und für die Sparte Kredit 38,5 Mio. Euro. Die Summe der Einzelrisiken beträgt 120,74 Mio. Euro.

Der Diversifikationseffekt ergibt sich aus der Differenz der Summe der Einzelrisiken und dem aggregierten Gesamtrisikokapital, d.h. hier sind es 29,81 Mio. Euro weniger, die man als Kapitalbedarf für das Prämienrisiko hinterlegen muss.

7 Internes Modell mit ReMetrica

7.1 Umsetzung in ReMetrica

Die Berechnung des Gesamtrisikokapitals wurde in ReMetrica mit zwei Ansätzen, dem Varianz-Kovarianz-Ansatz und dem Copula-Ansatz, simuliert. Das Gesamtrisikokapital entspricht der Differenz des 99,5% Perzentils (siehe 6.1) und den jährlichen Prämieinnahmen.

Um die Vergleichbarkeit der beiden Ansätze zu gewährleisten, wurden bei den Simulationen die gleichen Werte in der Kovarianzmatrix verwendet, die im Standardmodell vorgegeben sind. Es wurden die drei Sparten mit den vorgegebenen Werten wie im Standardmodell verwendet, d.h. die Sparte KFZ Haftpflicht mit 125 Mio., die Sparte Haftpflicht mit 103 Mio. und die Sparte Kredit und Kautions mit 56 Mio. Euro Nettoprämien. Da in der Praxis nicht nur lognormalverteilte bzw. normalverteilte Risiken auftreten, wurden noch andere Verteilungen angenommen, um die Auswirkungen zu testen. Bei der Auswahl der Verteilungen spielte die Verwendung in der Praxis eine große Rolle. Daher wurden neben der Lognormalverteilung auch die Weibull- und Gammaverteilung verwendet, welche in einem Unternehmen in der Sparte Nicht-Leben bei den Schätzungen der gegebenen Daten am häufigsten auftraten.

Da die Gammaverteilung eine geringe Wahrscheinlichkeitsmasse für große Werte besitzt, wird sie in Versicherungssparten eingesetzt, in denen kaum Großschäden zu erwarten sind. Die Gammaverteilung wird zum Beispiel in der Hausrat-, Gewerbe-, Kfz-Kasko- und Kfz-Haftpflichtversicherung angewendet.[24]

Die Weibull-Verteilung wird in der Regel, in der Schadenmodellierung, nur für $\alpha < 1$ verwendet, und zwar zur Abbildung von Großschäden, z. B. im Industriebereich, in der Kfz-Haftpflicht und der Rückversicherung. Sie eignet sich nur für $\alpha > 1$ für die Modellierung von Kleinschäden.[3]

Die in ReMetrica vorhandenen Extremwertverteilungen, die Exponentialverteilung und die Fisher-Tippett-Verteilung Typ 1 wurden zudem ausgewählt.

Die Exponentialverteilung, welche wegen ihrer Einfachheit oft zur Modellierung verwendet wird, findet insbesondere Anwendung in der Feuerversicherung.[24]

(Die Dichten der Verteilungen sind im Anhang 9 zu finden.)

Die Parameter der verschiedenen Verteilungen wurden den Vorgaben des Standardmodells angepasst, d.h. der Erwartungswertparameter wurde bei allen Sparten auf 100%, sowie die Standardabweichung entsprechend der vorgegebenen Tabelle für die Sparte KFZ Haftpflicht auf 10%, die Sparte Haftpflicht auf 15%, und die Sparte Kredit und Kautions auf 21,5% festgesetzt.

Die bei der Simulation verwendeten Standardabweichungen ergaben folgendes Risiko für

die einzelnen Sparten: für die Sparte KFZ Haftpflicht 12,5 Mio., die Sparte Haftpflicht 15,5 Mio. und die Sparte Kredit 12 Mio Euro.

Da im Standardmodell bei der Umsetzung in Excel die einzelnen Risiken der Sparten nicht explizit dargestellt werden, wurde das Prämienrisiko noch einmal mit dem Varianz-Kovarianz-Ansatz in ReMetrica nachgebildet.

Als Erstes wurden mit dem Varianz-Kovarianz-Ansatz und allen Kombinationen der gegebenen Verteilungen Szenarien simuliert, um zu untersuchen, wie sich die Anwendung des Varianz-Kovarianz-Ansatzes auf nicht normalverteilte Risiken auswirken kann. Die dabei entstandenen Werte wurden, beginnend mit dem größten zu hinterlegenden Gesamtrisikokapital, absteigend geordnet in Tabellenform geschrieben und sind im Anhang 9.3 zu finden.

Als Zweites wurden mit dem Copula-Ansatz die relevanten Verteilungskombinationen simuliert und mit den simulierten Werten des Varianz-Kovarianz-Ansatzes verglichen.

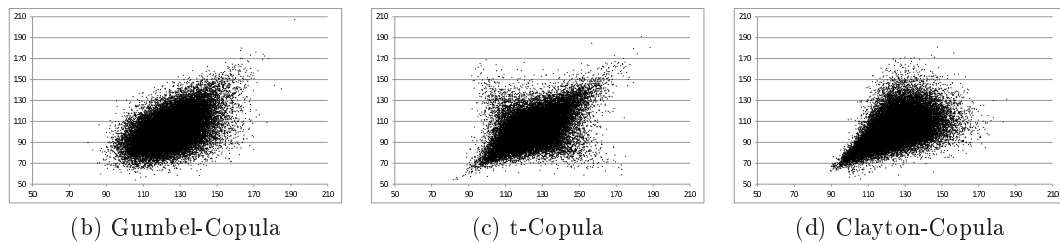


Abbildung 7.1: Verschiedene Copulas

Von den drei, in ReMetrica zur Verfügung stehenden, Copulas wurde die Gumbel-Copula ausgewählt, da sie, wie man in der Abbildung 7.1 gut sieht, eine obere Tail-Abhängigkeit besitzt und somit die höheren Abhängigkeiten von Großschäden am besten abbildet.

7.2 Simulation mit dem Varianz-Kovarianz-Ansatz

Die Anwendung des Varianz-Kovarianz-Ansatzes auf nicht normalverteilte Risiken hat die Konsequenz, dass das für Solvency II verlangte Sicherheitsniveau von 99,5% strenggenommen nicht genau getroffen wird. D.h. das Sicherheitsniveau wird höher oder niedriger eingestuft, wobei nur der letztere Fall problematisch ist. In dem Fall würde man das Risiko unterschätzen.

Dieser Fall tritt bei Annahme exponentialverteilter Risiken sowie bei Risiken, die als fisher-tippett-verteilt angenommen werden, ein. Dies kann man anhand der folgenden Tabelle sehr gut sehen. Für das Standardmodell wurde die Bezeichnung Standard gewählt.

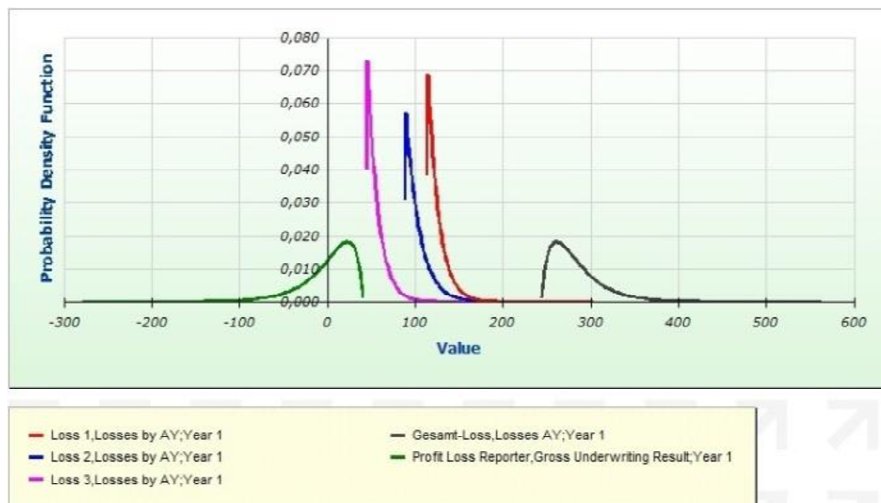
99,5% Perzentil	Expon.	Fisher	Standard	Gamma	Weibull
KFZ Haftpfl.	178,73	171	160,82	159,54	149,55
Haftpflicht	169,65	159,68	149,42	146,98	135,22
Kredit	107,72	100,53	94,5	92,06	82,93
Gesamt	407,14	391,51	375,87	372,43	352,92

Tabelle 7.1: 99,5% Perzentile der Verteilungen

In der Tabelle 7.1 stehen die 99,5% Perzentile, d.h. hier der VaR in Mio. Euro, der einzelnen Risiken und des Gesamtrisikos unter Annahme unterschiedlicher Verteilungen. Wie man sieht, tritt die größte Abweichung nach unten auf, wenn die Risiken als exponentialverteilt angenommen werden und die größte Abweichung nach oben bei der Annahme weibullverteilter Risiken.

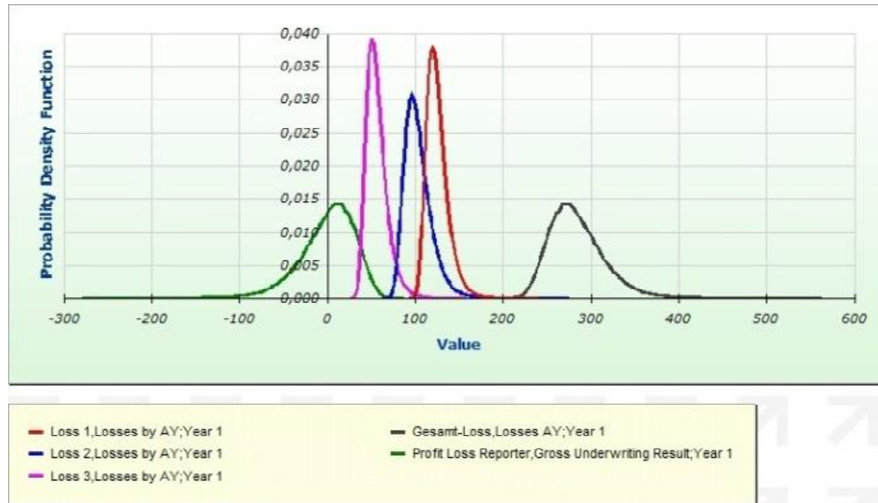
Die Dichtefunktionen mit den 99,5% Perzentilen sind in den folgenden Abbildungen dargestellt. Das Loss 1 entspricht dabei der Sparte KFZ Haftpflicht, das Loss 2 der Sparte Haftpflicht und das Loss 3 der Sparte Kredit. Das Gesamt-Loss entspricht dem 99,5% Perzentil des Gesamtrisikos.

Der Profit Loss Reporter entspricht dem Gesamtrisikokapital und wird anschließend ausgewertet.



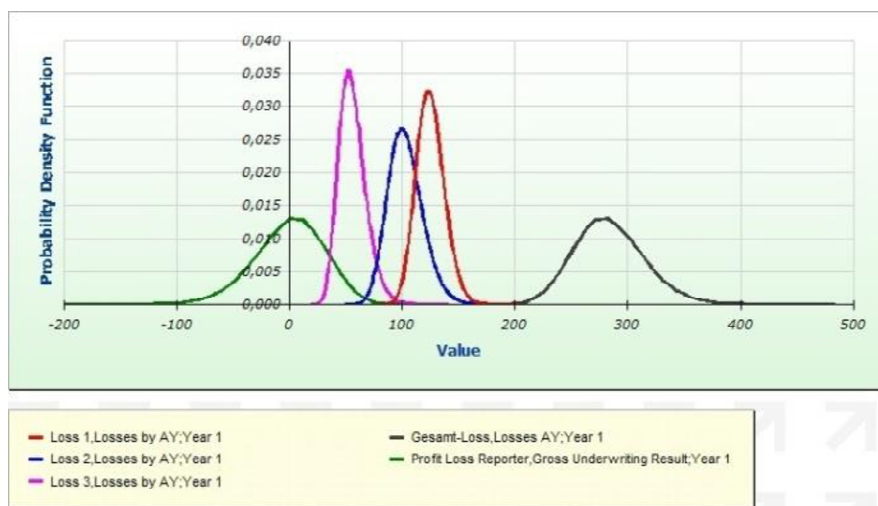
(a)

Abbildung 7.2: exponentialverteilte Risiken



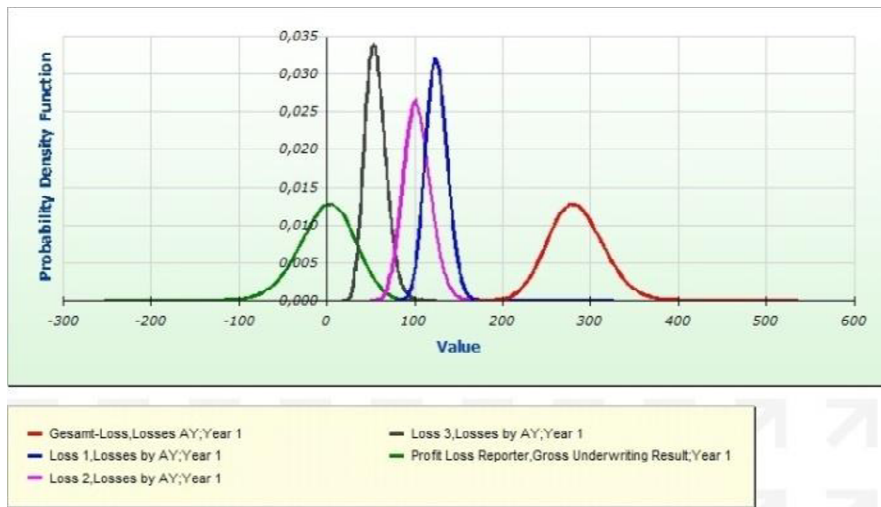
(a)

Abbildung 7.3: fisherverteilte Risiken



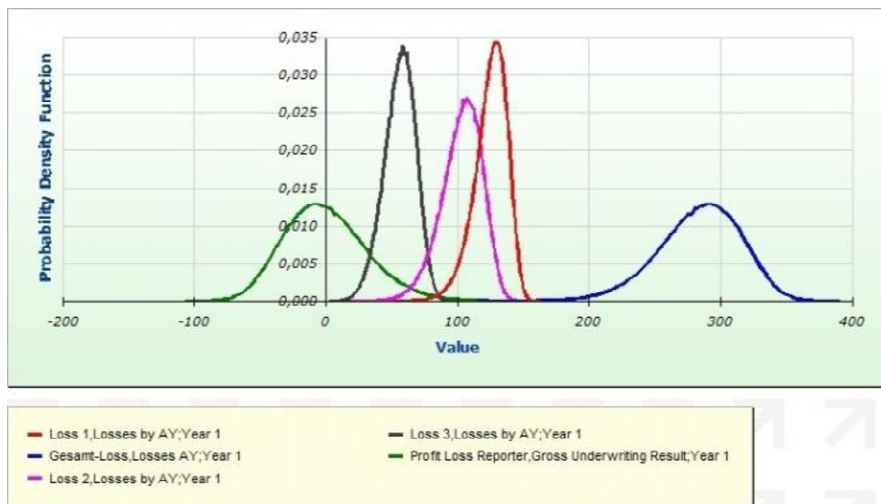
(a)

Abbildung 7.4: lognormalverteilte Risiken



(a)

Abbildung 7.5: gammaverteilte Risiken



(a)

Abbildung 7.6: weibullverteilte Risiken

Die folgenden Tabellen zeigen das Maximum und Minimum der Abweichungen vom Standardmodell als Werte des Risikokapitals der einzelnen Sparten, dem Diversifikationseffekt und dem Gesamtrisikokapital. Diese werden in der nebenstehenden Tabelle noch einmal in Prozent angegeben. Das Maximum tritt bei Annahme exponentialverteilter Risiken ein und das Minimum bei Annahme weibullverteilter Risiken. Das heißt, ausgehend vom Standardmodell kann eine maximale Abweichung des Gesamtrisikokapitals von 34% nach

oben und 25% nach unten erfolgen.

Risikokapital	max	Standard	min	Risikokapital	max in %	Standard	min in %
KFZ Haftpfl.	53,73	35,82	24,55	KFZ Haftpfl.	150%	100%	69%
Haftpfl.	66,65	46,42	32,05	Haftpfl.	144%	100%	69%
Kredit	51,72	38,5	26,85	Kredit	134%	100%	70%
Div.effekt	48,96	28,87	14,78	Div.effekt	170%	100%	51%
Gesamt	123,14	91,87	68,92	Gesamt	134%	100%	75%

(a) Werte in Mio. Euro

(b) in Prozent

Tabelle 7.2: Vergleich Standardmodell mit verschiedenen Verteilungen

Man sieht auch, dass sich der Diversifikationseffekt, ausgehend vom Standardmodell, bei Annahme exponentialverteilter Risiken um 70% erhöht und bei Annahme weibullverteilter Risiken um 49% verringert.

Um die Diversifikation besser beurteilen zu können, wurden für die Verteilungskombinationen mit weibull-,gamma- und lognormalverteilten Risiken zusätzlich die Diversifikationseffekte in Prozent berechnet und der Größe nach geordnet in eine Tabelle geschrieben (siehe Anhang Tabelle 9.4), d.h. es wurde ausgerechnet, um wie viel Prozent das Gesamtrisikokapital der aufsummierten Einzelrisiken mit der Diversifikation reduziert werden konnte.

Bei der Betrachtung der Tabelle sieht man, dass die prozentualen Diversifikationseffekte der verschiedenen Verteilungskombinationen unter dem prozentualen Diversifikationseffekt des Standardmodells liegen. Außerdem sinken diese Werte am Anfang sehr langsam. In dieser Tabelle besitzt die Kombination mit den weibullverteilten Risiken den niedrigsten prozentualen Diversifikationseffekt und außerdem das niedrigste Gesamtrisikokapital. Bei den anderen Verteilungskombinationen besteht so ein Zusammenhang jedoch nicht.

Bei der Auswertung der Tabelle (siehe Anhang Tabelle 9.3) mit den verschiedenen Kombinationen der Verteilungen haben sich einige Thesen ergeben.

These 1

Wenn in der Sparte Haftpflicht eine Exponentialverteilung vorliegt, dann liegt die Simulation des Gesamtrisikokapitals mit ReMetrica **über** der Berechnung des Gesamtrisikokapitals mit dem Standardmodell.

These 2

Wenn in der Sparte Haftpflicht eine Fisher-Tippett-Verteilung vorliegt, dann liegt die Simulation des Gesamtrisikokapitals mit ReMetrica **über** der Berechnung des Gesamtrisikokapitals mit dem Standardmodell.

Ausnahme ist die Kombination: Sparte KFZ Haftpflicht besitzt eine Weibullverteilung, Sparte Haftpflicht besitzt eine Fisher-Tippett-Verteilung und Sparte Kredit besitzt eine Weibullverteilung.

Begründung:

Die ersten beiden Thesen sind damit zu begründen, dass die Sparte Haftpflicht mit 15,5 Mio. Euro Standardabweichung das größte Risiko besitzt und daraus folgt, dass die Annahme einer anderen Verteilung die größte Auswirkung auf das Gesamtrisiko bewirkt. In dem Fall die Überschreitung des im Standardmodell berechneten Gesamtrisikokapitals. Die Ausnahme in These 2 ist damit zu begründen, dass die Fisher-Tippett-Verteilung nicht so extreme Werte simuliert wie die Exponentialverteilung. Die Kombination der Fisher-Tippett-Verteilung mit weibullverteilten Risiken kann den Wert des Gesamtrisikokapitals in dem Fall noch ausgleichen.

These 3

Wenn in der Sparte KFZ Haftpflicht eine Exponentialverteilung vorliegt, dann liegt die Simulation des Gesamtrisikokapitals mit ReMetrica **über** der Berechnung des Gesamtrisikokapitals mit dem Standardmodell.

Ausnahme ist die Kombination: Sparte KFZ Haftpflicht besitzt eine Exponentialverteilung, Sparte Haftpflicht besitzt eine Weibullverteilung und Sparte Kredit besitzt eine Weibullverteilung.

Begründung:

Die dritte These ist damit zu begründen, dass die Sparte KFZ Haftpflicht mit 12,5 Mio. Euro Standardabweichung das zweitgrößte Risiko besitzt und deshalb auch große Auswirkung auf das Gesamtrisiko besteht, welches in diesem Fall eine Überschreitung des im Standardmodell berechneten Gesamtrisikokapitals zur Folge hat.

Die Ausnahme ist wieder die Kombination mit weibullverteilten Risiken, welche den Wert des Gesamtrisikokapitals in dem Fall noch ausgleichen kann.

These 4

Wenn in zwei Sparten Extremwertverteilungen vorliegen, dann liegt die Simulation des Gesamtrisikokapitals mit ReMetrica **über** der Berechnung des Gesamtrisikokapitals mit dem Standardmodell.

Ausnahme ist die Kombination: Sparte KFZ Haftpflicht besitzt eine Fisher-Tippett-Verteilung, Sparte Haftpflicht besitzt eine Weibullverteilung und Sparte Kredit besitzt eine Fisher-Tippett-Verteilung.

Begründung:

Wie schon geschrieben, besitzt die Sparte Haftpflicht das größte Risiko, was bei einer Annahme der Weibullverteilung bedeutet, dass das Risiko erheblich kleiner wird und in Kombination mit fisher-tippett-verteilten Risiken in diesem Fall eine Unterschreitung des

im Standardmodell berechneten Gesamtrisikokapitals zur Folge hat.

These 5

Wenn in der Sparte Haftpflicht eine Weibullverteilung vorliegt und die Kombination der Verteilungen nicht zu einer schon aufgeführten These gehört, dann liegt die Simulation des Gesamtrisikokapitals mit ReMetrica **unter** der Berechnung des Gesamtrisikokapitals mit dem Standardmodell.

Begründung:

Die These ist damit zu begründen, dass die Sparte Haftpflicht entscheidend für das Gesamtrisikokapital ist und bei der Annahme einer Weibullverteilung am geringsten ausfällt. Mit den verbleibenden Kombinationen der Verteilungen hat diese Annahme eine Unterschreitung des im Standardmodell berechneten Gesamtrisikokapitals zur Folge.

These 6

Wenn in der Sparte Kredit eine Exponentialverteilung vorliegt, dann liegt die Simulation des Gesamtrisikokapitals mit ReMetrica **über** der Berechnung des Gesamtrisikokapitals mit dem Standardmodell.

Ausnahmen sind die Kombinationen der Verteilungen, die schon zur These 5 gehören.

Schlussfolgerung:

Bis auf die Kombination: Sparte KFZ Haftpflicht ist gammaverteilt, Sparte Haftpflicht lognormalverteilt und Sparte Kredit ist lognormalverteilt, liegen die Berechnungen des Gesamtrisikokapitals mit den restlichen Kombinationen von lognormal-, gamma- und weibullverteilten Risiken teilweise deutlich unter der Berechnung des Gesamtrisikokapitals mit dem Standardmodell. Daher kann die Umstellung vom Standardmodell auf ein Internes Modell, mit aus Daten geschätzten Verteilungen, dem Unternehmen deutlich mehr zur Verfügung stehendes Kapital bringen.

Das Auftreten von extremverteilten Risiken kann schnell zu einer Überschreitung des im Standardmodell berechneten Gesamtkapitals führen, weshalb besondere Vorsicht geboten sein sollte. Die Umstellung vom Standardmodell auf ein Internes Modell, mit aus Daten geschätzten Verteilungen, kann dem Unternehmen deutlich weniger zur Verfügung stehendes Kapital bringen, wäre aber in dem Fall sinnvoll, um das Unternehmen bei gleichzeitigem Eintreten von Großschäden aufrecht zu erhalten. Eine alternative Variante wäre die Verwendung des Standardmodells unter Abschluss einer Rückversicherung.

Die prozentualen Diversifikationseffekte, der Kombinationen von lognormal-, gamma-, und weibullverteilter Risiken, liegen immer unter dem prozentualen Diversifikationseffekt des Standardmodells.

7.3 Simulation mit dem Copula-Ansatz

7.3.1 Vergleich Copula und Standardmodell

In diesem Abschnitt wurden die Werte bei der Berechnung des Gesamtrisikokapitals mit der Gumbel-Copula mit den Werten des Standardmodells verglichen. Als Ausgangspunkt der Berechnung wurden die Risiken, wie im Standardmodell, als lognormalverteilt angenommen. Es wurden wieder die gleichen Werte in der Kovarianzmatrix verwendet, die im Standardmodell vorgegeben sind. Gumbel steht hierbei für die Gumbel-Copula und Standard wieder für das Standardmodell.

Risikokapital	Gumbel	Standard	Risikokapital	Gumbel	Standard
KFZ Haftpfl.	35,63	35,82	KFZ Haftpfl.	100%	100%
Haftpfl.icht	46,43	46,42	Haftpfl.icht	100%	100%
Kredit	38,78	38,5	Kredit	100%	100%
Div.effekt	16,45	28,87	Div.effekt	57%	100%
Gesamt	104,39	91,87	Gesamt	114%	100%

(c) Werte in Mio. Euro

(d) in Prozent

Tabelle 7.3: Vergleich Standardmodell mit Gumbel-Copula

In der Tabelle sieht man, dass die Werte der einzelnen Risiken bei der Simulation mit der Gumbel-Copula im Vergleich zum Standardmodell, wie zu erwarten, gleich geblieben sind und sich die erhöhte Abhängigkeit bei den Großschäden nur auf das Gesamtrisikokapital und somit auch auf den Diversifikationseffekt auswirkt. Das Gesamtrisikokapital beträgt somit 14% mehr als im Standardmodell und der Diversifikationseffekt nimmt um 43% ab.

Schlussfolgerung:

Bei der Simulation mit der Gumbel-Copula wird das Gesamtrisikokapital des Standardmodells überschritten, weshalb Vorsicht geboten sein sollte. Die Umstellung vom Standardmodell auf ein Internes Modell, mit aus Daten geschätzten Verteilungen, kann dem Unternehmen weniger zur Verfügung stehendes Kapital bringen. Eine alternative Variante wäre die Verwendung des Standardmodells unter Abschluss einer Rückversicherung.

7.3.2 Vergleich von verschiedenen Verteilungen

Als Ausgangspunkt der Berechnung wurden wieder die gleichen Werte in der Kovarianzmatrix verwendet, die im Standardmodell vorgegeben sind. Jedoch wurde diesmal überprüft, wie sich die verschiedenen Verteilungen bei der Simulation mit der Gumbel-Copula auswirken.

Da die Werte der Einzelrisiken bei der Simulation mit der Gumbel-Copula immer den

Werten entsprechen, die schon mit dem Varianz-Covarianz-Ansatz berechnet wurden, sind in der folgenden Tabelle nur nochmal die beiden Verteilungen aufgeführt, die das Maximum und Minimum der Abweichungen vom Standardmodell als Werte und in Prozent verursachen. Wie in der Tabelle 7.2 tritt das Maximum bei Annahme exponentialverteilter Risiken ein und das Minimum bei Annahme weibullverteilter Risiken. Standard steht hierbei wieder für das Standardmodell.

Risikokapital	max	Standard	min	Risikokapital	max in %	Standard	min in %
KFZ Haftpfl.	53,99	35,82	24,57	KFZ Haftpfl.	150%	100%	69%
Haftpflicht	66,98	46,42	32,08	Haftpflicht	144%	100%	69%
Kredit	51,63	38,5	26,96	Kredit	134%	100%	70%
Div.effekt	33,06	28,87	7,03	Div.effekt	115%	100%	24%
Gesamt	139,54	91,87	76,58	Gesamt	152%	100%	83%

(e) Werte in Mio. Euro

(f) in Prozent

Tabelle 7.4: Vergleich Standardmodell und Gumbel-Copula

Man sieht, dass sich die maximale Abweichung des Gesamtrisikokapitals, ausgehend vom Standardmodell, durch die Simulation mit der Gumbel-Copula sogar um 52% erhöhen kann. Nach unten kann eine Abweichung von 17%, ausgehend vom Standardmodell, erfolgen.

Bei der Simulation mit der Gumbel-Copula erhöht sich der Diversifikationseffekt, ausgehend vom Standardmodell, bei Annahme exponentialverteilter Risiken, nur um 15%, verringert sich aber bei Annahme weibullverteilter Risiken um 76% .

In der folgenden Tabelle ist die Verteilungskombination dargestellt, in der die Sparte KFZ Haftpflicht als lognormalverteilt, die Sparte Haftpflicht als weibullverteilt und die Sparte Kredit als lognormalverteilt angenommen wird. Diese Kombination wurde aus dem Grund gewählt, um die Auswirkungen der verschiedenen Simulationsansätze noch einmal verdeutlichen zu können. Es wurde eine Simulation mit der Gumbel-Copula vorgenommen und eine mit dem Varianz-Kovarianz-Ansatz. Gumbel steht hierbei wieder für die Simulation mit der Gumbel-Copula und die Bezeichnung lwl für die Simulation mit dem Varianz-Kovarianz-Ansatz.

Risikokapital	Gumbel	lwl	Risikokapital	Gumbel	lwl
KFZ Haftpfl.	35,82	35,82	KFZ Haftpfl.	100%	100%
Haftpfl.	32,19	32,19	Haftpfl.	100%	100%
Kredit	38,52	38,52	Kredit	100%	100%
Div.Effekt	14,06	24,69	Div.Effekt	57%	100%
Gesamt	92,47	81,84	Gesamt	113%	100%

(g) Werte in Mio. Euro

(h) in Prozent

Tabelle 7.5: Vergleich Copula-Ansatz und Varianz-Kovarianz-Ansatz

In der Tabelle sieht man, dass der Wert des Gesamtrisikokapitals, mit der Simulation der Gumbel-Copula, 13% über dem simulierten Wert mit dem Varianz-Kovarianz-Ansatz liegt.

Interessanter ist jedoch, dass der mit dem Varianz-Kovarianz-Ansatz simulierte Wert unter, und der mit der Gumbel-Copula simulierte Wert über, dem Wert des Standardmodells liegt, wie man in folgender Tabelle sehen kann. Standard steht hierbei wieder für das Standardmodell.

Risikokapital	Gumbel	Standard	lwl
KFZ Haftpfl.	35,82	35,82	35,82
Haftpfl.	32,19	46,42	32,19
Kredit	38,52	38,5	38,52
Div.Effekt	14,06	28,87	24,69
Gesamt	92,47	91,87	81,84

(i) Werte in Mio. Euro

Tabelle 7.6: Vergleich Standardmodell mit verschiedene Ansätzen

7.3.3 Vergleich von verschiedene Abhängigkeiten untereinander

Als Ausgangspunkt der Berechnung wurden die Risiken, wie im Standardmodell, als lognormalverteilt angenommen und mit der Gumbel-Copula simuliert. Mit dem Varianz-Kovarianz-Ansatz wurden die Werte des Standardmodells simuliert.

Dabei wurden die Abhängigkeiten der Risiken untereinander, bei beiden Simulationsvarianten, verändert und ausgewertet. Da mit der Gumbel-Copula keine negativen Abhängigkeiten simuliert werden können, wurden diese hier nicht mit betrachtet.

Die folgende Tabelle zeigt jeweils die Werte der einzelnen Risiken, des Diversifikationseffekts und des Gesamtrisikokapitals mit veränderten Abhängigkeiten. Die Abhängigkeit

zwischen den Sparten KFZ Haftpflicht und Kredit bleibt dabei mit 25% bei allen drei Vergleichen immer gleich. Nur die Abhängigkeiten zwischen den Sparten KFZ Haftpflicht und Haftpflicht sowie den Sparten Haftpflicht und Kredit werden variiert. In der linken Tabelle betragen die Abhängigkeiten jeweils 25%, in der Mitte jeweils 50% und in der rechten Tabelle jeweils 75%, wobei die Abhängigkeiten in der Mitte der Kovarianzmatrix dem Standardmodell entsprechen. Gumbel steht hierbei für die Simulation mit der Gumbel-Copula und Standard wieder für das Standardmodell.

Risikokapital	Gumbel	Standard	Gumbel	Standard	Gumbel	Standard
KFZ Haftpfl.	35,63	35,82	35,63	35,82	35,63	35,82
Haftpflicht	46,43	46,42	46,43	46,42	46,43	46,42
Kredit	38,78	38,5	38,78	38,5	38,78	38,5
Div.effekt	25,63	39,34	16,45	28,87	11,98	19,74
Gesamt	95,21	81,4	104,39	91,87	108,86	101

(j) Werte in Mio. Euro

Tabelle 7.7: niedrige Abh. Abhängigkeit wie Standardmodell hohe Abh.

In der Abbildung kann man sehen, dass das Gesamtrisikokapital in der Tabelle mit den niedrigen Abhängigkeiten, bei der Simulation mit dem Standardansatz, unter der Berechnung des Standardmodells (Mitte) liegt. Der Wert des Gesamtrisikokapitals, bei der Simulation mit der Gumbel-Copula jedoch noch immer über dem berechneten Wert des Standardmodells liegt. In der Tabelle mit den hohen Abhängigkeiten liegen beide Werte des Gesamtrisikokapitals über dem Wert des Standardmodells.

Die Werte wurden in der folgenden Tabelle noch einmal in Prozent angegeben, um die Auswirkungen anders darstellen zu können.

Risikokapital	Gumbel	Standard	Gumbel	Standard	Gumbel	Standard
KFZ Haftpfl.	100%	100%	100%	100%	100%	100%
Haftpflicht	100%	100%	100%	100%	100%	100%
Kredit	100%	100%	100%	100%	100%	100%
Div.effekt	65%	100%	57%	100%	61%	100%
Gesamt	117%	100%	114%	100%	108%	100%

(k) in Prozent

Tabelle 7.8: niedrige Abh. Abhängigkeit wie Standardmodell hohe Abh.

Wie man an den Werten erkennen kann, ist der Unterschied des Gesamtrisikokapitals zwischen der Gumbel-Copula und dem Standardmodell umso höher, je niedriger die Ab-

hängigkeit zwischen den Risiken angenommen wird.

In der linken Tabelle beträgt die Abweichung des Gesamtrisikokapitals, ausgehend vom Standardmodell, 17% nach oben, in der Mitte 14% und in der rechten Tabelle beträgt die Abweichung 8% nach oben.

Bei der Simulation mit der Gumbel-Copula nahmen die Werte des Diversifikationseffektes, bei Erhöhung der Abhängigkeiten zwischen den einzelnen Risiken, langsamer ab als beim Standardmodell.

7.3.4 Praxisbeispiel

Um einen Vergleich zwischen dem Standardmodell mit lognormalverteilten Risiken und einem internen Modell, mit in der Praxis verwendeten geschätzten Verteilungen der Risiken, zu ziehen, wurden bei den Simulationen die Parameter wie im Standardmodell verwendet und auch die Werte der Kovarianzmatrix des Standardmodells beibehalten. Nur die Verteilungen der Risiken wurden den geschätzten Verteilungen des Unternehmens angepasst. Das heißt die Sparte KFZ Haftpflicht wird als gammaverteilt, die Sparte Haftpflicht als weibullverteilt und die Sparte Kredit auch als weibullverteilt angenommen. In der folgenden Tabelle sind die Werte der einzelnen Risiken, der Diversifikationseffekt und das Gesamtrisikokapital aufgeführt. Für das Standardmodell wurde wieder die Bezeichnung Standard gewählt und gww steht für die Simulation mit dem Varianz-Kovarianz-Ansatz, mit den für das Unternehmen geschätzten Verteilungen.

Risikokapital	gww	Standard	Risikokapital	gww	Standard
KFZ Haftpfl.	34,54	35,82	KFZ Haftpfl.	96%	100%
Haftpflicht	32,05	46,42	Haftpflicht	69%	100%
Kredit	26,87	38,5	Kredit	70%	100%
Div.effekt	19,06	28,87	Div.effekt	66%	100%
Gesamt	74,4	91,87	Gesamt	81%	100%

(l) Werte in Mio. Euro

(m) in Prozent

Tabelle 7.9: Vergleich Praxisbeispiel und Standardmodell

Wie man sieht, könnte dem Unternehmen bei Verwendung des internen Modells mit den geschätzten Verteilungen, ausgehend vom Standardmodell, 19% mehr Kapital zur Verfügung stehen. Das wären in dem Fall 17,47 Mio. Euro.

Simuliert man die Werte mit der Gumbel-Copula und den geschätzten Verteilungen des Unternehmens unter Beibehaltung der Parameter und der Werte der Kovarianzmatrix des Standardmodells, erhöht sich, wie nach den Ergebnissen aus Kapitel 7.3.1 zu erwarten, das Gesamtrisikokapital. Diese Werte sind in der folgenden Tabelle aufgeführt. Dabei steht Gumbel für die Simulation mit der Gumbel-Copula und gww für die Simulation mit dem Varianz-Kovarianz-Ansatz, mit den für das Unternehmen geschätzten Verteilungen.

Risikokapital	Gumbel	gww	Risikokapital	Gumbel	gww
KFZ Haftpfl.	34,53	34,54	KFZ Haftpfl.	100%	100%
Haftpfl.	32,09	32,05	Haftpfl.	100%	100%
Kredit	26,94	26,87	Kredit	100%	100%
Div.effekt	9,45	19,06	Div.effekt	50%	100%
Gesamt	84,11	74,4	Gesamt	113%	100%

(n) Werte in Mio. Euro (o) in Prozent

Tabelle 7.10: Vergleich Praxisbeispiel mit Varianz-Kovarianz-Ansatz und Copula-Ansatz

Wie man hier sieht, erhöht sich das Gesamtrisikokapital bei der Simulation mit der Gumbel-Copula um 13% und der Diversifikationseffekt verringert sich um 50%. In folgender Tabelle wurden die Werte des Standardmodells mit den Werten verglichen, die mit der Gumbel-Copula und den geschätzten Verteilungen des Unternehmens simuliert wurden. Gumbel steht hierbei wieder für die Gumbel-Copula und Standard für das Standardmodell.

Risikokapital	Gumbel	Standard	Risikokapital	Gumbel	Standard
KFZ Haftpfl.	34,53	35,82	KFZ Haftpfl.	96%	100%
Haftpfl.	32,09	46,42	Haftpfl.	69%	100%
Kredit	26,94	38,5	Kredit	70%	100%
Div.effekt	9,45	28,87	Div.effekt	33%	100%
Gesamt	84,11	91,87	Gesamt	92%	100%

(p) Werte in Mio. Euro (q) in Prozent

Tabelle 7.11: Vergleich Praxisbeispiel mit Copula-Ansatz und Standardmodell

Man sieht, dass dem Unternehmen, selbst bei Verwendung des internen Modells mit den geschätzten Verteilungen der Risiken und Simulation mit der Gumbel-Copula, ausgehend vom Standardmodell noch 8% mehr Kapital zur Verfügung stehen könnte. Das wären in dem Fall immerhin 7,76 Mio. Euro. Der Diversifikationseffekt beträgt zwar nur noch 33% des Standardmodells, jedoch sind die Werte der Einzelrisiken auch teilweise bedeutend geringer als im Standardmodell.

8 Fazit

Ziel dieser Arbeit ist es, die Eignung des Standardmodells zur Berechnung des SCR's für das Prämienrisiko zu untersuchen, wenn andere Voraussetzungen als im Standardmodell festgelegt gegeben sind, und wie sich dabei der Diversifikationseffekt verhält.

Zu diesem Zweck wurden verschiedene Veränderungen bei der Wahl der Simulationsansätze, der Wahl der Verteilungen der einzelnen Risiken und der Wahl der Abhängigkeiten der Einzelrisiken untereinander vorgenommen und untersucht.

Dabei ergab sich, bei der Simulation mit dem Varianz-Kovarianz-Ansatz und verschiedenen Verteilungen, dass sich das Standardmodell, aus Sicht der BaFin (Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht), bei der Annahme, dass in der Realität nur die Kombinationen von weibull-, gamma- und lognormalverteilten Risiken auftreten, für die Berechnung des SCR's für das Prämienrisiko geeignet, da es im allgemeinen das Gesamtrisiko nicht unterschätzt.

Auch die Werte des prozentualen Diversifikationseffektes liegen bei diesen Verteilungskombinationen noch unter dem Wert des Standardmodells.

Jedoch ist das Standardmodell, aus der Sicht des Versicherungsunternehmens, in dem Fall nicht immer zur Berechnung des SCR's für das Prämienrisiko geeignet, da das Unternehmen bei Verwendung eines internen Modells teilweise viel weniger Gesamtrisikokapital zurücklegen müsste.

Andererseits musste festgestellt werden, dass beim Auftreten einer Extremwertverteilung in der Realität das Standardmodell, aus Sicht der BaFin, nicht geeignet sein könnte, da das Gesamtrisiko unterschätzt werden kann. Beim Auftreten von zwei Risiken mit Extremwertverteilungen in der Realität ergab sich bei der Auswertung der Daten, dass mit Ausnahme einer Verteilungskombination das Standardmodell das reale Gesamtrisiko unterschätzt, weshalb es nicht geeignet ist. Das Standardmodell kann in dem Fall trotzdem noch geeignet sein, wenn das Versicherungsunternehmen zusätzlich eine Rückversicherung abschließt.

Bei der Simulation mit dem Copula-Ansatz musste festgestellt werden, dass das Standardmodell nicht für die Berechnung geeignet ist. Es unterschätzt das Gesamtrisiko, welches durch die obere Tail-Abhängigkeit der Gumbel-Copula höher ausfällt als bei der Berechnung mit dem Standardmodell.

Außerdem ergab sich, dass bei der Simulation mit dem Copula-Ansatz und verschiedenen Verteilungen die Unterschätzung des Gesamtrisikos, bei der Berechnung mit dem Standardmodell, noch höher ausfallen kann. Des Weiteren konnte anhand einer Verteilungskombination gezeigt werden, dass das Standardmodell für die Berechnung des SCR's für das Prämienrisiko bei der Simulation mit dem Varianz-Kovarianz-Ansatz geeignet ist, da

das Gesamtrisiko nicht unterschätzt wird. Bei der Simulation mit dem Copula-Ansatz versagt das Standardmodell jedoch, da in diesem Fall das Gesamtrisiko unterschätzt wird.

Bei Annahme niedriger Abhängigkeiten der Risiken untereinander ergab sich, dass bei der Simulation mit dem Varianz-Kovarianz-Ansatz, aus Sicht der BaFin, das Standardmodell zur Berechnung geeignet ist, da es das Gesamtrisiko nicht unterschätzt.

Jedoch eignet sich das Standardmodell nicht, bei Annahme niedriger Abhängigkeiten der Risiken untereinander und Simulation mit dem Copula-Ansatz, da dabei das Gesamtrisiko unterschätzt wird. Bei Annahme hoher Abhängigkeiten der Risiken untereinander ergab sich hingegen, dass bei der Simulation mit dem Varianz-Kovarianz-Ansatz und dem Copula-Ansatz, aus Sicht der BaFin, das Standardmodell zur Berechnung nicht geeignet ist, da das Gesamtrisiko unterschätzt wird.

Bei der Simulation des Praxisbeispiels ergab sich die Erkenntnis, dass sowohl bei der Simulation mit dem Varianz-Kovarianz-Ansatz als auch bei der Simulation mit dem Copula-Ansatz das Standardmodell, aus Sicht der BaFin, geeignet ist. Aus Sicht des Versicherungsunternehmens ist das Standardmodell jedoch bei beiden Simulationsansätzen nicht geeignet, da bei Verwendung eines internen Modells weniger Gesamtrisikokapital zurückgelegt werden müsste.

Insgesamt lässt sich hieraus der Schluss ziehen, dass die Benutzung eines internen Modells der Benutzung des Standardmodells vorgezogen werden sollte, wenn genügend gute Daten zur Schätzung der gebrauchten Parameter vorhanden sind.

9 Anhang

Lognormalverteilung

„Die Lognormalverteilung ist eine der zentralen Wahrscheinlichkeitsverteilungen zur Beschreibung von Risiken unter Solvency II und wird insbesondere zur Berechnung des Solvenzkapitals (SCR) für das Prämien- und Reserverisiko herangezogen. Unter dem Solvency Capital Requirement (SCR) für ein Risiko in einem Geschäftsfeld wird prinzipiell der Unterschiedsbetrag zwischen dem zugehörigen Value at Risk zum Sicherheitsniveau von 99,5% und den vorhandenen Eigenmitteln, in der Regel in Form eines Risiko-Erwartungswerts, verstanden.

Statistische Grundlagen

Besitzt ein nicht-negatives Risiko X eine Lognormalverteilung, so ist das logarithmierte Risiko $Y = \ln(X)$ normalverteilt. Die Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$ ist durch die beiden Parameter μ (Erwartungswert) und σ^2 (Varianz) charakterisiert. Die Größe $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ bezeichnet die Standardabweichung. Wenn $m = E(X)$ den Erwartungswert von X und $s^2 = Var(X)$ die Varianz von X bezeichnet, so besteht folgende Beziehung zwischen diesen Größen und den Parametern μ und σ^2 :

$$m = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right), s^2 = \exp(2\mu + \sigma^2)(\exp(\sigma^2) - 1).$$

Wenn m und s^2 gegeben sind, erhält man durch Auflösung dieser Gleichungen nach μ und σ^2

$$s^2 = m^2(\exp(\sigma^2) - 1) \Rightarrow \sigma^2 = \ln\left(1 + \frac{s^2}{m^2}\right)$$
$$\mu = \ln(m) - \frac{\sigma^2}{2} = \ln(m) - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{s^2}{m^2}\right) = \ln\left(\frac{m}{\sqrt{1 + \frac{s^2}{m^2}}}\right)$$

Die Bestimmung des β -Quantils $LN_\beta = LN_\beta(\mu, \sigma^2)$ der Lognormalverteilung mit den Parametern μ und σ^2 erfolgt über das β -Quantil $N_\beta = N_\beta(\mu, \sigma^2)$ der Normalverteilung mit den Parametern μ und σ^2 gemäß

$$\beta = P(X \leq LN_\beta) = P(\ln(X) \leq \ln(LN_\beta)) = P(\ln(X) \leq N_\beta)$$

Daraus ergibt sich:

$$N_\beta = \ln(LN_\beta) \text{ bzw. } LN_\beta = \exp(N_\beta)$$

Das allgemeine β -Quantil $N_\beta(\mu, \sigma^2)$ der Normalverteilung steht mit dem β -Quantil $N_\beta(0, 1)$ der Standardnormalverteilung $N(0, 1)$ in folgendem Zusammenhang:

$$N_\beta(\mu, \sigma^2) = \mu + \sigma \cdot N_\beta(0, 1).$$

Damit ist das allgemeine β -Quantil der Lognormalverteilung durch:

$$LN_\beta(\mu, \sigma^2) = \exp(N_\beta(\mu, \sigma^2)) = \exp(\mu + \sigma \cdot N_\beta(0, 1)).$$

gegeben.

Für die Bestimmung des Prämien- und Reserverisikos wird insbesondere $m = 1$ gesetzt, woraus

$$\mu = -\frac{\sigma^2}{2} = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}\right), \sigma^2 = \ln(1+s^2)$$

folgt. Daraus ergibt sich für das β -Quantil

$$LN_\beta(0, \sigma^2) = \exp(\mu + \sigma \cdot N_\beta(0, 1)) = \frac{\exp\left(N_\beta(0, 1) \cdot \sqrt{\ln(1+s^2)}\right)}{\sqrt{1+s^2}}.$$

In den Technical Specifications zur QIS 5 werden entgegen der statistischen Konvention die Größen m und s^2 mit μ und σ^2 bezeichnet.“

[28]

Tabelle Auswertung ReMetrica

Vorgaben wie Standardmodell mit verschiedenen Verteilungen

Risikokapital	expo	eef	fee	eel	eeg	lee	efe	fef
KFZ Haftpfl.	53,73	53,73	46	53,73	53,73	35,82	53,73	46
Haftpflicht	66,65	66,65	66,36	66,65	66,65	67	56,68	66,36
Kredit	51,72	44,3	51,42	38,58	35,94	51,57	51,8	44,39
Div.effekt	48,96	45,64	46,15	41,72	39,85	38,75	46,91	41,77
Gesamt	123,14	119,04	117,63	117,24	116,47	115,64	115,3	114,98

Risikokapital	gee	eew	fel	eff	lef	feg	ffe	gef
KFZ Haftpfl.	34,54	53,73	46	53,73	35,82	46	46	34,54
Haftpflicht	66,99	66,65	66,36	56,68	67	66,36	56,68	66,99
Kredit	51,57	26,93	38,55	44,52	44,5	35,85	51,7	44,38
Div.effekt	39,26	33,95	37,82	42,87	35,46	36,37	42,9	35,01
Gesamt	113,84	113,36	113,09	112,06	111,86	111,84	111,48	110,9

Risikokapital	wee	efl	ele	few	leg	lel	efg	gel
KFZ Haftpfl.	24,55	53,73	53,73	46	35,82	35,82	53,73	34,54
Haftpflicht	66,64	56,68	46,71	66,36	67	67	56,68	66,99
Kredit	51,52	38,59	51,77	26,87	35,93	38,55	36,1	38,76
Div.effekt	32,28	39,11	43,34	30,43	30,13	32,91	38,2	32,19
Gesamt	110,43	109,89	108,87	108,8	108,62	108,46	108,31	108,1

Risikokapital	ege	fisher	geg	lfe	gfe	wef	ffl	efw
KFZ Haftpfl.	53,73	46	34,54	35,82	34,54	24,55	46	53,73
Haftpflicht	44,38	56,68	66,99	56,85	56,77	66,64	56,68	56,68
Kredit	51,91	44,53	35,8	51,83	51,74	44,34	38,75	26,96
Div.effekt	42,36	39,7	29,85	37,1	35,7	29,31	35,79	32,59
Gesamt	107,66	107,51	107,48	107,4	107,35	106,22	105,64	104,78

Risikokapital	elf	lew	fle	gew	lff	ffg	wel	egf
KFZ Haftpfl.	53,73	35,82	46	34,54	35,82	46	24,55	53,73
Haftpflicht	46,71	67	46,44	66,99	56,85	56,68	66,64	44,38
Kredit	44,07	26,99	51,43	26,99	44,58	36	38,57	44,14
Div.effekt	40,04	25,68	39,87	24,64	33,46	34,89	26,01	39,09
Gesamt	104,47	104,13	104	103,88	103,79	103,79	103,75	103,16

Risikokapital	fge	weg	gff	wfe	ell	ewe	egl	lfl
KFZ Haftpfl.	46	24,55	34,54	24,55	53,73	53,73	53,73	35,82
Haftpflicht	44,24	66,64	56,77	56,33	46,71	32,08	44,38	56,85
Kredit	51,88	35,89	44,52	51,76	38,48	51,94	38,89	38,77
Div.effekt	38,98	24,19	33,3	30,13	37,32	37,06	36,47	31,02
Gesamt	103,14	102,89	102,53	102,51	101,6	100,69	100,53	100,42

Risikokapital	ffw	flf	elg	lfg	lle	egg	gfg	gfl
KFZ Haftpfl.	46	46	53,73	35,82	35,82	53,73	34,54	34,54
Haftpflicht	56,68	46,44	46,71	56,85	46,45	44,38	56,77	56,77
Kredit	26,94	44,07	35,99	35,83	51,27	35,95	36,1	38,91
Div.effekt	29,25	36,21	36,34	28,91	34,08	34,61	28,23	31,07
Gesamt	100,37	100,3	100,09	99,59	99,46	99,45	99,18	99,15

Tabelle 9.1: Tabelle mit verschiedenen Verteilungen Teil 1

9 Anhang

Risikokapital	lge	gle	wff	wew	fgf	flf	gge	elw
KFZ Haftpfl.	35,82	34,54	24,55	24,55	46	46	34,54	53,73
Haftpflicht	44,26	46,38	56,33	66,64	44,24	46,44	44,16	46,71
Kredit	51,85	51,15	44,55	26,96	44,51	38,38	51,7	26,95
Div.effekt	33,06	33,29	26,66	19,66	36,48	32,76	32,63	30
Gesamt	98,87	98,78	98,77	98,49	98,27	98,06	97,77	97,39

Risikokapital	flg	fgl	egw	lfw	ewf	llf	fwe	wfl
KFZ Haftpfl.	46	46	53,73	35,82	53,73	35,82	46	24,55
Haftpflicht	46,44	44,24	44,38	56,85	32,08	46,45	32,15	56,33
Kredit	35,99	38,75	26,91	27,04	44,09	44,36	51,62	38,69
Div.effekt	32,25	33,07	29,11	24,2	34,42	31,48	34,78	24,68
Gesamt	96,18	95,92	95,91	95,51	95,48	95,15	94,99	94,89

Risikokapital	wle	gfw	glf	fgg	wge	wfg	lgf	ewl
KFZ Haftpfl.	24,55	34,54	34,54	46	24,55	24,55	35,82	53,73
Haftpflicht	46,37	56,77	46,38	44,24	44,09	56,33	44,26	32,08
Kredit	51,37	26,94	44,41	36,03	51,92	36,01	44,21	38,68
Div.effekt	27,59	23,61	31,13	32,19	26,59	22,98	30,62	31,2
Gesamt	94,7	94,64	94,2	94,08	93,97	93,91	93,67	93,29

Risikokapital	flw	ggf	gll	ewg	standard	llg	lgl	fgw
KFZ Haftpfl.	46	34,54	34,54	53,73	35,82	35,82	35,82	46
Haftpflicht	46,44	44,16	46,92	32,08	46,42	46,42	44,28	44,24
Kredit	26,92	44,04	38,7	35,89	38,5	35,99	38,69	26,89
Div.effekt	26,48	30,15	27,99	29,65	28,87	27,14	27,82	26,39
Gesamt	92,88	92,59	92,17	92,05	91,87	91,09	90,97	90,74

Risikokapital	wlf	lwe	fwf	glg	ggl	gwe	lgg	wfw
KFZ Haftpfl.	24,55	35,82	46	34,54	34,54	34,54	35,82	24,55
Haftpflicht	46,37	32,19	32,15	46,38	43,98	32,05	44,26	56,33
Kredit	44,32	51,73	43,95	35,99	38,91	51,59	35,9	26,83
Div.effekt	24,91	29,44	31,91	26,94	27,51	28,41	26,59	18,39
Gesamt	90,33	90,3	90,19	89,97	89,92	89,77	89,39	89,32

Risikokapital	eww	gamma	wgf	fwl	llw	fwg	wve	wll
KFZ Haftpfl.	53,73	34,54	24,55	46	35,82	46	24,55	24,55
Haftpflicht	32,08	43,98	44,09	32,15	46,42	32,15	32,19	46,37
Kredit	26,92	36,06	44,33	38,8	26,91	36,05	51,79	38,45
Div.effekt	23,8	26,15	24,63	29,21	22,49	27,6	22,12	23,2
Gesamt	88,93	88,43	88,34	87,74	86,66	86,6	86,41	86,17

Risikokapital	glw	lwf	wlg	lgw	wgl	ggw	gwf	wgg
KFZ Haftpfl.	34,54	35,82	24,55	35,82	24,55	34,54	34,54	24,55
Haftpflicht	46,38	32,19	46,37	44,26	44,09	44,16	32,05	44,09
Kredit	26,93	44,21	35,94	26,98	38,66	27,03	44,02	35,99
Div.effekt	22,14	26,97	21,64	22,1	22,55	21,65	26,53	21,41
Gesamt	85,71	85,25	85,22	84,96	84,75	84,08	84,08	83,22

Tabelle 9.2: Tabelle mit verschiedenen Verteilungen Teil 2

9 Anhang

Risikokapital	fww	lwl	lwg	gwl	wlw	wwf	gwg	wgw
KFZ Haftpfl.	46	35,82	35,82	34,54	24,55	24,55	34,54	24,55
Haftpflicht	32,15	32,19	32,19	32,05	46,37	32,19	32,05	44,09
Kredit	26,9	38,52	35,76	38,62	26,93	44,25	35,83	26,85
Div.effekt	22,22	24,69	23,05	24,58	17,43	21,02	23,04	17,16
Gesamt	82,83	81,84	80,72	80,63	80,42	79,97	79,38	78,33

Risikokapital	wwl	lww	wwg	gww	weibull
KFZ Haftpfl.	24,55	35,82	24,55	34,54	24,55
Haftpflicht	32,19	32,19	32,19	32,05	32,22
Kredit	38,57	26,96	35,91	26,87	26,93
Div.effekt	18,92	19,21	17,74	19,06	14,78
Gesamt	76,39	75,76	74,91	74,4	68,92

Tabelle 9.3: Tabelle mit verschiedenen Verteilungen Teil 3

e=Exponentialverteilung, gamma=Gammaverteilung, weibull=Weibulverteilung, fisher=Fisher-Tippett-Verteilung, Standard=Standardmodell, l=Lognormalverteilung, e=Exponentialverteilung, f=Fisher-Tippett-Verteilung, g=Gammaverteilung, w=Weibulverteilung

9 Anhang

Tabelle zur Beurteilung des Diversifikationseffektes in Prozent

Risikokapital	standard	ggf	lgf	gwf	gll	lwl	glg	llg
KFZ Haftpfl.	35,82	34,54	35,82	34,54	34,54	35,82	34,54	35,82
Haftpflicht	46,42	43,98	44,28	32,05	46,92	32,19	46,38	46,42
Kredit	38,5	38,91	38,69	38,62	38,7	38,52	35,99	35,99
Div.Effekt	28,87	27,51	27,82	24,58	27,99	24,69	26,94	27,14
Div.Effekt %	23,91%	23,43%	23,42%	23,36%	23,29%	23,18%	23,04%	22,95%
Gesamt	91,87	89,92	90,97	80,63	92,17	81,84	89,97	91,09

Risikokapital	lgg	gamma	ggw	lgw	wll	wgl	lgw	llw
KFZ Haftpfl.	35,82	34,54	34,54	35,82	24,55	24,55	35,82	35,82
Haftpflicht	44,26	43,98	32,05	32,19	46,37	44,09	44,26	46,42
Kredit	35,9	36,06	35,83	35,76	38,45	38,66	26,98	26,91
Div.Effekt	26,59	26,15	23,04	23,05	23,2	22,55	22,1	22,49
Div.Effekt %	22,93%	22,82%	22,49%	22,21%	21,21%	21,02%	20,64%	20,60%
Gesamt	89,39	88,43	79,38	80,72	86,17	84,75	84,96	86,66

Risikokapital	glw	ggw	wgg	gww	wlg	lww	wwl	wwg
KFZ Haftpfl.	34,54	34,54	24,55	34,54	24,55	35,82	24,55	24,55
Haftpflicht	46,38	44,16	44,09	32,05	46,37	32,19	32,19	32,19
Kredit	26,93	27,03	35,99	26,87	35,94	26,96	38,57	35,91
Div.Effekt	22,14	21,65	21,41	19,06	21,64	19,21	18,92	17,74
Div.Effekt %	20,53%	20,48%	20,46%	20,39%	20,25%	20,22%	19,85%	19,15%
Gesamt	85,71	84,08	83,22	74,4	85,22	75,76	76,39	74,91

Risikokapital	wgw	wlw	weibull
KFZ Haftpfl.	24,55	24,55	24,55
Haftpflicht	44,09	46,37	32,22
Kredit	26,85	26,93	26,93
Div.Effekt	17,16	17,43	14,78
Div.Effekt %	17,97%	17,81%	17,66%
Gesamt	78,33	80,42	68,92

Tabelle 9.4: Tabelle mit Diversifikationseffekten in Prozent

e=Exponentialverteilung, gamma=Gammaverteilung, weibull=Weibulverteilung, fisher=Fisher-Tippett-Verteilung, Standard=Standardmodell, l=Lognormalverteilung, e=Exponentialverteilung, f=Fisher-Tippett-Verteilung, g=Gammaverteilung, w=Weibulverteilung

Verteilungen

Alle Verteilungen besitzen den Erwartungswert 1 und die Standardabweichung 0,215.

Lognormalverteilung

Eine Zufallsvariable X hat eine Lognormalverteilung mit Parameter μ und σ^2 , wenn X die Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x > 0$$

($f(x) = 0$, sonst) besitzt.

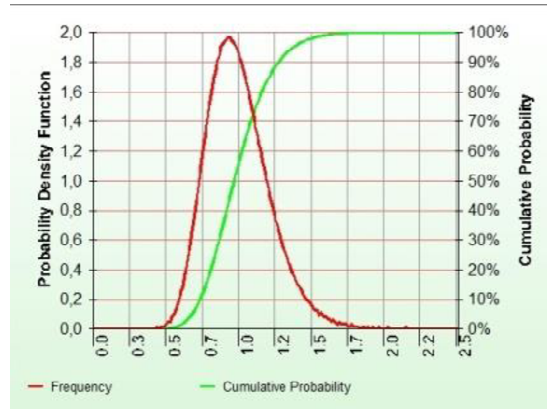


Abbildung 9.1: Lognormalverteilung

Weibullverteilung

Eine Zufallsvariable X hat eine Weibullverteilung mit Parameter $\alpha > 0$ und $\lambda > 0$, wenn X die Dichte

$$f(x) = \alpha \cdot \lambda \cdot x^{\alpha-1} \cdot \exp(-\lambda x^\alpha), \quad x > 0$$

($f(x) = 0$, sonst) besitzt.

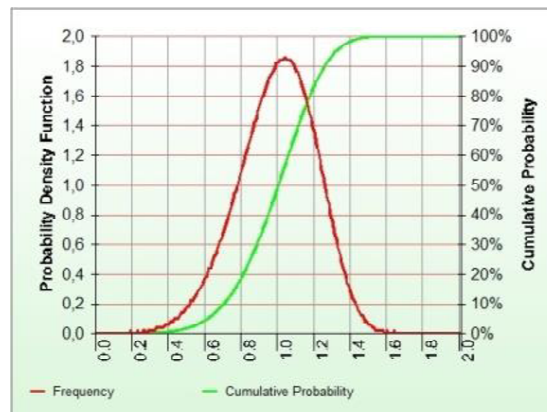


Abbildung 9.2: Weibullverteilung

Gammaverteilung

Eine Zufallsvariable X hat eine Gammaverteilung mit Parameter $\alpha > 0$ und $\lambda > 0$, wenn X die Dichte

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot \exp^{-\lambda x}, \quad \text{falls } x > 0$$

($f(x) = 0$, sonst) besitzt.

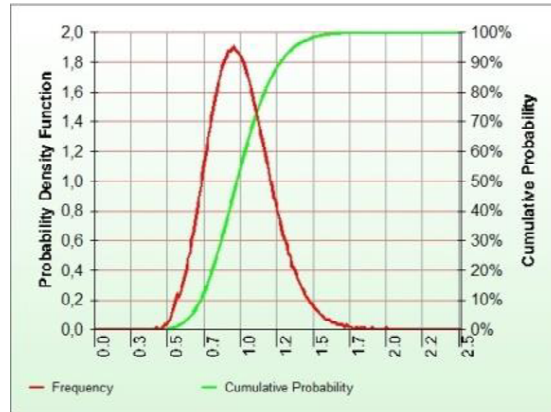


Abbildung 9.3: Gammaverteilung

Exponentialverteilung

Eine Zufallsvariable X hat eine Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda > 0$, wenn X die Dichte

$$f(x) = \lambda \cdot \exp^{-\lambda x}, \quad \text{falls } x > 0$$

($f(x) = 0$, sonst) besitzt.



Abbildung 9.4: Exponentialverteilung

Fisher-Tippett-Verteilung

Eine Zufallsvariable X hat eine Fisher-Tippett-Verteilung mit Parameter $\beta > 0$ und $\mu \in \mathbb{R}$, wenn X die Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\beta} \exp \left[\frac{x - \mu}{\beta} - \exp \left(\frac{x - \mu}{\beta} \right) \right], \quad x \in \mathbb{R}$$

besitzt.

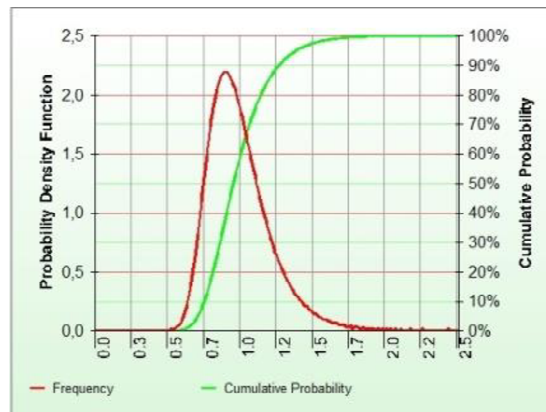


Abbildung 9.5: Fisher-Tippett-Verteilung

[11] [34]

Kovarianzformel/Wurzelformel

„Die Kovarianzformel wird unter Solvency II zur rechnerischen Aggregation einzelner SCR zu einem Gesamt-SCR verwendet. Sie beruht wesentlich auf statistischen Eigenschaften der multivariaten Normalverteilung.

Statistische Grundlagen

Besitzen zwei Risiken X und Y eine gemeinsame bivariate Normalverteilung, so ist das Summenrisiko $S = X + Y$ ebenfalls normalverteilt. Für die resultierende Varianz ergibt sich

$$\text{Var}(S) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2 \cdot \text{Kov}(X, Y),$$

wobei $\text{Kov}(X, Y)$ die Kovarianz zwischen X und Y bezeichnet. Mit Hilfe der Korrelation $\rho \in [-1, 1]$ zwischen X und Y lässt sich die Kovarianz einfacher darstellen als

$$\text{Kov}(X, Y) = \rho \cdot \text{Var}(X) \cdot \text{Var}(Y).$$

Dies hat insbesondere Konsequenzen für die Berechnung der Eigenkapitalanforderung $SCR_\alpha(S)$ zum Risikoniveau α für das Summenrisiko S , denn dieses ist direkt proportional zur Streuung $\sqrt{Var(S)}$, mit

$$SCR_\alpha(S) = \sqrt{SCR_\alpha(X)^2 + SCR_\alpha(Y)^2 + 2 \cdot \rho \cdot SCR_\alpha(X) \cdot SCR_\alpha(Y)}$$

Diese Beziehung ist auch der Grund für die alternative Namensgebung „Wurzelformel“. Für mehr als zwei gemeinsam normalverteilte Risiken gilt die Formel entsprechend. Wenn die Korrelation ρ strikt kleiner als 1 ausfällt, ergibt sich

$$\begin{aligned} SCR_\alpha(S) &< \sqrt{SCR_\alpha(X)^2 + SCR_\alpha(Y)^2 + 2 \cdot SCR_\alpha(X) \cdot SCR_\alpha(Y)} \\ &= \sqrt{(SCR_\alpha(X) + SCR_\alpha(Y))^2} = SCR_\alpha(X) + SCR_\alpha(Y) \end{aligned}$$

so dass in diesem Fall ein Diversifikationseffekt auftritt (das benötigte Eigenkapital ist geringer als die Summe der einzeln berechneten Eigenkapitalien). Dies ist insbesondere der Fall bei einer Korrelation von Null; in diesem Fall sind die Risiken X und Y sogar stochastisch unabhängig. (Diese Schlussweise gilt allerdings in der Regel nur bei gemeinsamer Normalverteilung.)

Anwendungen unter Solvency II

Die Kovarianzformel wird an verschiedenen Stellen zur Aggregation unterschiedlicher SCR zu einem Gesamt-SCR unter Berücksichtigung potenzieller Diversifikationseffekte verwendet. Dabei werden in der Regel Korrelationen zwischen den verschiedenen Risiken von CEIOPS vorgegeben, z.B. beim Prämien- und Reserverisiko Non-Life zwischen den einzelnen Geschäftsfeldern oder auch beim Marktrisiko.

Problematisch ist hierbei die unkritische Anwendung der Kovarianzformel auch auf Risiken, die typischerweise nicht normalverteilt sind, wodurch das für Solvency II postulierte Sicherheitsniveau von 99,5% strenggenommen nicht genau getroffen wird. Es können Abweichungen nach oben sowie nach unten eintreten, wobei nur der letztere Fall problematisch ist. Eine praktikable Alternative für einen Standardansatz ist allerdings aus mathematischen Gründen kaum denkbar.“

[28]

Sonstiges

Erklärung für verdiente und gezeichnete Prämien:

„Bei den verdienten Prämien handelt es sich um den Anteil der gezeichneten Prämien, die im Rechnungszeitraum verdient wurden, während sich die gezeichneten Prämien auf den Zeitraum der Versicherungspolice erstrecken. Die Differenz zwischen gezeichneten Prämien und verdienten Prämien sind Beträge, die zurückgestellt und in die Rückstellungen für Prämienüberträge aufgenommen werden.[...]“

Die im jeweiligen Jahr verdienten Prämien haben folgende Form: gezeichnete Prämien plus Rückstellungen für Prämienüberträge zu Beginn des Geschäftsjahres minus Rückstellungen für Prämienüberträge am Ende des Geschäftsjahres. Oder anders dargestellt, haben sie folgende Form: gezeichnete Prämien minus Differenz (minus Zuwachs oder plus Verringerung) bei den Rückstellungen für Prämienüberträge. [...] Bei Nichtlebensversicherungen ist zwar gegebenenfalls zu Beginn des Versicherungszeitraums eine Prämie zu zahlen, aber die Prämien werden kontinuierlich über den gesamten Zeitraum hinweg verdient. Der Versicherer hält zu jedem Zeitpunkt des Versicherungszeitraums einen dem Versicherungsnehmer in Bezug auf Dienstleistungen und potenzielle Leistungen in der Zukunft zustehenden Betrag bereit. Dabei handelt es sich um eine Art Kredit, den der Versicherungsnehmer dem Versicherer gewährt und der als Prämienüberträge bezeichnet wird.[...]“[7] Anhang A Seite 9-10

Literaturverzeichnis

- [1] Casella, G. (1998): Monte Carlo Statistical Methods, Cornell University, Ithaca, NY
- [2] Cech, C.(2012): Die Eigenmittelanforderungen an Versicherungen im Standardansatz von Solvency II, University of Applied Sciences bfi Vienna, Working Paper Series Number 74 / 2012
- [3] Cottin, Claudia und Döhler, Sebastian (2009): Risikoanalyse: Modellierung, Beurteilung und Management von Risiken mit Praxisbeispielen, Vieweg + Teubner
- [4] Embrecht, P.; Lindskog, F.; McNeil, A.(2001): Modelling dependence with copulas and application to risk management, In: Handbook of heavy tailed distributions in finance, ed. S. Rachev (pp. 329-384): Elsevier.
- [5] Embrecht, P.; McNeil, A.; Straumann, D. (1999): Correlation and dependence in risk management: Properties and pitfalls, In: Dempster, M.A.H. (Ed.), Risk Management, Cambridge University Press, Cambridge. pp. 176-223.
- [6] Europäische Kommission (2010): QIS5 Technical Specifications, Brüssel <http://www.ceiops.eu/index.php?option=content&task=view&id=732> ; 05.09.2012
- [7] Europäische Kommission (2010): Verordnung des europäischen Parlaments und des Rates: zum Europäischen System Volkswirtschaftlicher Gesamtrechnungen auf nationaler und regionaler Ebene in der Europäischen Union, Brüssel
- [8] Fischer, B. : Vorlesung Investmentmathematik, Hochschule Mittweida
- [9] Hahne, J.; Tischer, W.(2011): Quantitatives Risikomanagement: Korrelation und Abhängigkeit im Risikomanagement: Eigenschaften und Irrtümer, Bergische Universität Wuppertal <http://www2.math.uni-wuppertal.de/~ruediger/pages/lehre/ss11/risikomanagement/AusarbeitungHahneTischer.pdf>; 05.09.2012
- [10] Hartung, Joachim (1999): Statistik, 12. Auflage, Oldenbourg Verlag
- [11] Henze, Norbert(2010): Stochastik für Einsteiger: Eine Einführung in die faszinierende Welt des Zufalls, Vieweg + Teubner
- [12] Jansen, A.(2005) 3D-Diversifikation und Unternehmenserfolg: Die Erfolgswirkung der horizontalen, geografischen und vertikalen Diversifikation deutscher Aktiengesellschaften, Deutscher Universitäts-Verlag

- [13] Kaserer, C.(2011) Solvency II und Basel III: Die Reform der europäischen Versicherungs- und Bankenregulierung und deren Auswirkungen auf die Unternehmensfinanzierung, Technische Universität München <http://www.muenchen.ihk.de/de/standortpolitik/Anhaenge/Gutachten-FPMI-Basel-III.pdf>
- [14] Kolonko, M.(2008): Stochastische Simulation: Grundlagen, Algorithmen und Anwendungen, Vieweg+Teubner
- [15] Koziol, P. (2007): Analyse der von Copulas erzeugten Ausfallabhängigkeiten und deren Auswirkungen auf das Risikomanagement, GRIN Verlag
- [16] Kriele, Marcus und Wolf, Jochen (2010): Wertorientiertes Risikomanagement von Versicherungsunternehmen, Springer
- [17] Nelsen, R. (1999): An introduction to copulas, Springer, NY
- [18] Markowitz, H. (1952): Portfolio Selection, The Journal of Finance, Vol. 7,No. 1,S. 77 ff.
- [19] McNeil, A.;Frey, R.;Embrecht, P.(2005) Quantitative Risk Management; Concepts, Techniques and Tools, Princeton University Press.
- [20] Meurer, C.(2011): Das aktuelle Standardmodell zur Berechnung des Solvenzkapitals des Nicht-Leben-(Rück-)Versicherers nach Solvency II: Konzeptionelle Änderungen der QIS5 im Vergleich zur QIS4 http://www.deutscherueck.de/uploads/tx_dbdownloads/Solvency_II_aktuelles_Standardmodell.pdf; 22.10.2012
- [21] Nielhof, Martin (2009): Modellierung von stochastischen Abhängigkeiten mittels Copulas, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Diplomarbeit
- [22] Pfeifer, D.(2008): Quantitatives Risikomanagement, Universität Oldenburg <http://www.staff.uni-oldenburg.de/dietmar.pfeifer/QRM.pdf>; 15.12.2012
- [23] Reuse, S.(2010) Korrelationen in Extremsituationen: Eine empirische Analyse des deutschen Finanzmarktes mit Fokus auf irrationales Marktverhalten, Gabler
- [24] Sauler, Katja (2009): Das Prämienrisiko in der Schadenversicherung unter Solvency II, ifa-Schriftenreihe
- [25] Savu, C.(2007): Modellierung multivariater Abhängigkeitsstrukturen auf Finanzmärkten mit archimedischen und hierarchischen archimedischen Copulas. Logos, Berlin
- [26] Scharfen, K.(2009) Risikosteuerung Mit Value at Risk Und Cashflow at Risk, GRIN Verlag
- [27] Schmid, Friedrich (2006): Finanzmarktstatistik, Springer

Literaturverzeichnis

- [28] <http://www.solvency-ii-kompakt.de/content/lognormalverteilung>; 22.10.2012
- [29] Villmann, T. : Vorlesung Numerik, Hochschule Mittweida
- [30] Weidner, Wiltrud (2010): Modelling and management of non-linear dependencies: An application for stress testing, Universität Ulm, Diplomarbeit
- [31] Wiedemann, A.(2007): Messung von Zinsrisiken mit dem Value at Risk-Konzept, Universität Siegen
- [32] Wulf, T.(2005) Diversifikationserfolg: Eine top-management-orientierte Perspektive, Deutscher Universitäts-Verlag
- [33] Zengin, T.(2011): Monte-Carlo Methoden zur Berechnung der Sensitivitäten von Optionspreisen (Greeks), Bergische Universität Wuppertal, Masterarbeit, unveröffentlicht
- [34] <http://mathworld.wolfram.com/GumbelDistribution.html>; 26.06.2013
- [35] <http://www.risknet.de/risknews/themen-special-risikomanagement-bei-der-allianz/661cf20b8e64bcd228153850fce6987c/>; 22.10.2012

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel angefertigt habe.

Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht.

Diese Arbeit wurde in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.

Dittersbach, den 17. Juli 2013

Juliane Störzel